Programme de Khôlle $n°$21 (semaine 12)

Matrices - Formes quadratiques

EN2D2 Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

MATRICES - DETERMINANTS - DIAGONALISATION : Toute l'algèbre linéaire.

FORMES QUADRATIQUES : Formes bilinéaires, formes quadratiques, aspect matriciel, rang, signature, formes dégénérées, non dégénérées, définies, non définies, semi-définies, non semi-définies. Décomposition de Gauss (forme réduite). Espaces vectoriels euclidiens, bases orthonormées. produits scalaires.

Exercices préparatoires :

Exercice 1.

Déterminer les rangs et signatures des formes quadratiques suivantes. Dire si elles sont dégénérées ou pas, définies ou pas, semi-définies ou pas, positives ou pas, négatives ou pas, bleues ou pas.

1) $q(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$,

2) $q(x,y,z,t) = xy + yz + zt + tx$,

3) $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j$.

Exercice 2.

Déterminer la forme réduite de $q(x,y) = 6x^2 + 4xy + 9y^2$ dans une base orthonormée.

Exercice 3.

Soit q une forme quadratique et f sa forme polaire sur un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f n'est ni dégénérée, ni semi-définie. Montrer que q n'est pas de signe constant.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) Via la matrice associée, on trouve trois valeurs propres distinctes : 0 et les racines de $X^2+6X-\frac{45}{2}$ qui sont de signe différent, d'où la signature $\operatorname{sgn}(q)=(1,1)$, $\operatorname{rg}(q)=2$. Dégénérée, non définie, non semi-définie et un peu bleue quand même.

2) On trouve $q(x,y,z,t)=\frac{1}{4}(x+y+z+t)^2-\frac{1}{4}(x-y+z-t)^2$. Les deux formes linéaires sont indépendantes, donc $\operatorname{sgn}(q)=(1,1)$ et $\operatorname{rg}(q)=2$. Idem que la précédente.

3) On a $q(x_1,\dots,x_n)=(x_1+\cdots+x_n)^2$, d'où la signature $\operatorname{sgn}(q)=(1,0)$ et le rang vaut $\operatorname{rg}(q)=1$. Même conclusion.

Exercice 2.

On trouve 5 et 10 pour valeurs propres et pour vecteurs propres associés $e_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ et $e_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$. D'où la forme réduite $q(X,Y)=5X^2+10Y^2$ dans cette nouvelle base.

Exercice 3.

Si $\dim(E)=n$ est finie, alors on a la signature $\operatorname{sgn}(q)=(a,b)$ avec $a+b<n$, $a\neq 0$ et $b\neq 0$. Donc il existe une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. Il existe donc des vecteurs propres dont les images sont de signe différent.