Programme de Khôlle $n°$23 (semaine 14)

Fonctions de plusieurs variables - Extrema

EN2D2 Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

FORMES QUADRATIQUES : Toute la leçon.
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES : Ecrire un développement à l'ordre 2 d'une fonction de 2 variables. Produit scalaire et bases orthonormales.
EXTREMA : Calcul d'extrema sans contrainte.

Exercices préparatoires :

Exercice 1.

1) Tout ce que vous savez faire sur la forme quadratique $q(x,y) = x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2}$

On considère dorénavant la fonction $f(x,y,z) = x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} + e^z - z$.

2) Montrer que f n'admet qu'un seul point critique.

3) Déterminer s'il s'agit d'un extremum, auquel cas, calculer la valeur de f en ce point.

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la forme quadratique q associée à la forme bilinéaire f donnée par la matrice A. Quelle est sa signature ?

2) A-t-on f qui définit un produit scalaire ?

3) Déterminer une base orthonormale pour f.

Solutions des exercices

Exercice 1.

2) en $(0,0,0)$

3) Minimum qui vaut 0.

Exercice 2.

1) La forme quadratique cherchée est $q(X) = {}^tXAX = (x,y,z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz.$

En factorisant, on trouve

$$q(X) = 2\left[\left(y-\frac{x}{2}-\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} + x^2 + z^2\right] = 2\left[\left(y-\frac{x}{2}-\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} + \frac{3z^2}{4}\right]$$

D'où la signature : $(3,0)$.

2) La forme est bilinéaire, symétrique (comme la matrice), définie positive (d'après la signature). Il s'agit donc d'un produit scalaire.

3) On cherche le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres. Ce qui donne par la méthode usuelle : $\mathrm{Spec}(A) = \{2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}\}$ et les vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces derniers vecteurs sont orthogonaux. Pour en faire une base orthonormale, il suffit de diviser chacun d'entre eux par les normes respectives, à savoir 2, $\sqrt{2}$ et 2.