

Exercice 1. ♪

Soient A , B et C trois ensembles. Démontrer que :

- | | |
|---|---|
| 1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | 3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
| 2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | 4) $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$. |
- 5) $((A \cap B) \cup (C \cap \overline{A})) \subset (A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap C)$.

Exercice 2. ♪

1) On considère les ensembles $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ et $C = \{b, c, f, g\}$.
Déterminer $A \Delta (B \cup C)$, puis $(A \Delta B) \cup (A \Delta C)$.

2) Mêmes questions avec $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e, f\}$ et $C = \{b, c, d, f, g\}$.

Exercice 3. ♪

Soit E un ensemble. Si A est une partie de E , on lui associe l'application $\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

On appelle cette application la fonction caractéristique de A .

Soient A et B deux parties de E .

- 1) Exprimer en fonction de $\mathbf{1}_A$ et de $\mathbf{1}_B$ les fonctions caractéristiques de $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $A \setminus B$ et $A \Delta B$.
- 2) Soit C une troisième partie de E . Montrer que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$. (Associativité de la différence symétrique).
- 3) Montrer qu'il existe une partie A' de E telle que $A \Delta A' = \emptyset$.

Exercice 4. ♪

Indiquer si la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constitue une partition de E , dans les cas suivants :

- | | |
|---|---|
| 1) $A_n = \{n, n+2\}$ et $E = \mathbb{N}$ | 4) $A_n = [n, n+1[$ et $E = \mathbb{R}$ |
| 2) $A_n = \{n, n+1\}$ et $E = \mathbb{N}$ | 5) $A_n = [n+1, n+2[$ et $E = [0, +\infty[$ |
| 3) $A_n = \{2n, 2n+1\}$ et $E = \mathbb{N}$ | 6) $A_n = [-n, n]$ et $E = \mathbb{R}$ |

Exercice 5. ♪

Soient $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$, $C = \{a, b, c, d\}$, $D = \{f\}$, $E = \{b, c\}$, $F = \{e, f\}$, $G = \{b\}$, des parties de X . Déterminer toutes les familles comprenant certaines de ces parties et qui constituent une partition de X .

Exercice 6. ♪

Soit un dé à six faces numérotées de 1 à 3 (chaque chiffre étant représenté deux fois). On effectue deux jets consécutifs, le deuxième jet n'étant effectué que si le résultat du premier est un chiffre impair.

- 1) Indiquer l'ensemble des résultats possibles, à chacun des jets.
- 2) On ne s'intéresse qu'aux résultats correspondants à deux jets successifs, que l'on représentera par des couples (x, y) , où x est le résultat du premier jet et y le résultat du second.
 - a) Montrer que l'ensemble E de ces résultats est le produit cartésien de deux ensembles que l'on déterminera.
 - b) Montrer que l'ensemble F des résultats (x, y) tels que $x + y$ soit pair est le carré cartésien d'un ensemble que l'on déterminera.

Exercice 7. ♪

Soit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto (X \cap A, X \cap B)\end{aligned}$$

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que φ soit injective? surjective? bijective?

Exercice 8. ♪

Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ est multiple de } 3, \quad x \in E, y \in E$$

Construire le graphe $G_{\mathcal{R}}$ de cette relation binaire. Montrer que cette relation est symétrique et indiquer comment on peut le voir sur le graphe.

Exercice 9. ♪

Soit E l'ensemble des droites du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On considère la relation $//$ sur E définie par la parallélisme de deux droites.

- 1) Montrer que $//$ est une relation d'équivalence.
- 2) Montrer que l'ensemble des classes d'équivalence est en bijection avec les droites passant par l'origine.

Exercice 10. ♪

Soit E un ensemble fini non vide et x un élément fixé de E . La relation binaire suivante sur $\mathcal{P}(E)$ est-elle une relation d'équivalence?

$$ARB \Leftrightarrow [(x \in A \cap B) \vee (x \in \overline{A} \cap \overline{B})]$$

Exercice 11. ♪ (Cachan 2000) *Un must !*

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble $E \neq \emptyset$. Pour $x \in E$, on note $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$. Soit $(x, y) \in E^2$.

- 1) Montrer la sorite :
 - i. $x\mathcal{R}y$
 - ii. $\dot{x} = \dot{y}$
 - iii. $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset$
 - iv. x et y appartiennent à la même classe d'équivalence.
- 2) En déduire que si $(x, y) \in E^2$, on a $\dot{x} \neq \dot{y} \Leftrightarrow \dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$

- 3) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- 4) Préciser, pour $x \in \mathbb{R}$, le nombre d'éléments dans $\dot{x}$, classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 12. ♪

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$a\mathcal{R}b \text{ si et seulement si } a^3 - b^3 = a - b$$

- 1) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- 2) Déterminer les classes d'équivalence.

Exercice 13. ♪

On considère dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation définie par : $(x, x')\mathcal{R}(y, y')$ si et seulement si $x + y' = x' + y$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Donner la classe d'équivalence de $(1; 2)$.

Exercice 14. ♣

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation binaire $(x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow xy = zt$.

- 1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- 2) Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$?
- 3) Si l'on impose en plus $xz \geq 0$, a-t-on toujours une relation d'équivalence?
- 4) On suppose dorénavant que l'on se place sur $\mathbb{Z}^2$ au lieu de $\mathbb{R}^2$.
 - a) Expliquez brièvement pourquoi $\mathcal{R}$ définit encore une classe d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$.
 - b) Décrire les classes d'équivalence des éléments suivants : $(1, 1)$, $(1, 0)$ et $(3, 4)$.

Exercice 15. (*Ordre lexicographique*) ♣

On considère dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relation définie par

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ si et seulement si } (x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')).$$

- 1) Est-ce une relation d'ordre? total? partiel?
- 2) On utilise la même relation d'ordre sur $[0; 1]^2$. Représenter les majorants de $(\ln(2); e^{-1})$.
- 3) Soit $A \subset [0; 1]^2$ une partie non-vide. Montrer que A admet une borne sup.

Exercice 16. (*Ordre sur $\mathbb{R}^2$*) ♣

On définit sur $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \preceq (x', y') \Leftrightarrow |x' - x| \leq y' - y$.

- 1) Vérifier que c'est une relation d'ordre.
- 2) Dessiner les ensembles des majorants et des minorants d'un couple (a, b) .
- 3) L'ordre est-il total?
- 4) Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\}$. Déterminer $\sup(A)$.

Exercice 17. ♣

Les fonctions suivantes sont-elles des applications injectives? surjectives?

- 1) La fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.
- 2) La fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3$.
- 3) La fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.
- 4) La fonction f définie de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.
- 5) La fonction f définie de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

Exercice 18. ♣

On considère l'application f de E dans F définie par :

$$f(x) = |1 + x| + |1 - x| - 2, \quad x \in E$$

- 1) On suppose que $E = F = \mathbb{R}$.
 - a) Etant donné un nombre réel x_0 , comparer $f(x_0)$ et $f(-x_0)$. En déduire que f n'est pas injective.
 - b) En distinguant suivant le signe de $1 + x$ et de $1 - x$, donner les différentes expressions de $f(x)$ ne faisant plus intervenir les valeurs absolues.
 - c) Représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$ et en déduire l'ensemble image $f(\mathbb{R})$. L'application est-elle surjective?
- 2) On suppose maintenant que $E = [1, +\infty[$ et $F = [0, +\infty[$.
 - a) Donner une expression de $f(x)$ en fonction de x .
 - b) Déterminer, si elle existe, l'application réciproque f^{-1} de F dans E .

Exercice 19. ♣

Indiquer dans quels cas la relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers F est une application. Déterminer alors si elle est injective, surjective, bijective.

- 1) $E = F = \mathcal{P}(A)$, $X\mathcal{R}Y$ si et seulement si $Y = \overline{X}$.
- 2) $E = F = \mathbb{N}^2$, $(x, x')\mathcal{R}(y, y')$ si et seulement si $x - y = x' - y'$.

3) $E = \mathbb{N}^2$, $F = \mathbb{N}$, $(x, x')\mathcal{R}y$ si et seulement si $y = xx'$.

Exercice 20. ♣

On pose

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Pour la relation d'ordre classique sur $\mathbb{R}$, déterminer des minorants, majorants, le plus petit élément, le plus grand élément, la borne inf et la borne sup quand ces valeurs existent.

Exercice 21. (Cachan 2008) ♣

Dans ce problème, Ω désigne un ensemble fini. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . On définit sur l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(\Omega)$ une relation binaire $\preccurlyeq$ comme ceci :

Pour toutes parties X et Y de $\mathcal{P}(\Omega)$, on dit que $X \preccurlyeq Y$ si et seulement si la propriété suivante est vraie :

Pour tout $B \in Y$, il existe $A \in X$ tel que $B \subset A$.

1) Si Ω est un ensemble qui contient n éléments, rappeler, sans démonstration, quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.

2) Dans cette question uniquement, on prend $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ et on définit $X = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$ et $Y = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$. Montrer que $X \preccurlyeq Y$ et que $Y \preccurlyeq X$.

3) On revient au cas général. Montrer que la relation $\preccurlyeq$ est réflexive et transitive. Est-ce que $\preccurlyeq$ est toujours une relation d'ordre ?

4) On définit maintenant $\prec$ la restriction de $\preccurlyeq$ à l'ensemble des partitions de Ω . Plus précisément, si X est une partition de Ω et si Y est une partition de Ω , on dira que $X \prec Y$ si et seulement si $X \preccurlyeq Y$.

a) Rappeler la définition d'une partition de Ω .

b) Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre. est-ce une relation d'ordre total ?

c) Dans le cas où $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, trouver le plus grand élément de l'ensemble des partitions de Ω pour la relation $\prec$.



Solutions des exercices

Exercice 1.

1) Par double inclusion : si $x \in A \cap (B \cup C)$ alors $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Ainsi $x \in A$ et ($x \in B$ ou $x \in C$). Donc $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$, ce qui donne bien $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Pareil dans l'autre sens.

2) Idem.

3) Idem. C'est lassant.

4) C'est guère plus différent mais pour réviser la différence symétrique, on le fait : On veut montrer que $B = C$. Logiquement, il faut faire une double inclusion mais bon, là, les rôles de B et C sont symétriques, donc on peut se contenter d'un sens. (Ceux qui n'en sont pas convaincus pourront toujours faire l'autre sens)

Soit $x \in B$, deux cas se présentent :

- soit $x \in A$, auquel cas $x \notin A \Delta B$. Ce qui implique $x \notin A \Delta C$ par l'égalité de l'hypothèse. Et comme $x \in A$, cela implique que x est dans C .

- soit $x \notin A$, auquel cas $x \in A \Delta B$, d'où $x \in A \Delta C$. Mais comme $x \notin A$, cela implique que $x \in C$.

Donc $B \subset C$.

5) Quand on pose des questions stupides, il faut s'attendre à devoir les corriger un jour... Tant pis donc.

Soit $x \in ((A \cap B) \cup (C \cap \bar{A}))$ alors $x \in A \cap B$ ou $x \in C \cap \bar{A}$. On traite les deux cas :

- Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$. Il reste à voir que si $x \in C$, alors $x \in B \cap C$, donc dans $(A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap C)$ et si $x \notin C$ alors $x \in A \cap \bar{C}$ et là encore on a la même conclusion.

- Si $x \in C \cap \bar{A}$, même idée avec la disjonction dépendant de $x \in B$ ou $x \in \bar{B}$...

Exercice 2.

1) $A \Delta (B \cup C) = \{a, e, f, g\}$ et $(A \Delta B) \cup (A \Delta C) = \{a, b, d, e, f, g\}$.

On remarque donc que la différence symétrique n'est pas distributive sur l'union.

2) $A \Delta (B \cup C) = \{a, e, f, g\}$ et $(A \Delta B) \cup (A \Delta C) = \{a, e, f, g\}$.

Exercice 3.

1) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_{A \Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$.

2) Faire un diagramme de Venn pour s'en convaincre. On peut utiliser les fonctions caractéristiques que l'on vient de trouver :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{(A \Delta B) \Delta C} &= \mathbf{1}_{A \Delta B} + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_{A \Delta B} \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_C (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_C \mathbf{1}_A - 2\mathbf{1}_C \mathbf{1}_B + 4\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C \end{aligned}$$

On vérifie qu'on obtient la même chose de l'autre côté (et que cela coïncide avec le diagramme de Venn)

3) Il suffit de prendre $A' \subset A$.

Exercice 4.

1) Recouvrement mais pas disjoint : e.g. $A_1 \cap A_3 = \{3\} \neq \emptyset$.

2) Idem.

3) Recouvrement disjoint donc partition.

4) Et les négatifs ? Pas recouvrement bien que disjoint.

5) Et $[0, 1[$? Toujours pas un recouvrement.

6) Recouvrement, mais pas disjoint car les segments A_n sont emboîtés.

Exercice 5.

Il suffit d'écrire les éléments en abscisses et les ensembles en ordonnées. On met une croix quand un ensemble contient l'élément. On doit donc avoir une lecture en ligne des possibilités :

G		+				
F					+	+
E		+	+			
D						+
C	+	+	+	+		
B	+			+	+	
A	+	+				
	a	b	c	d	e	f

On remarque donc que F doit faire partie de la partition si on veut que e soit pris. Du coup, f y est obligatoirement et D n'est pas dans la partition.

On raisonne ensuite sur d .

- Si on prend C , alors la partition est complète, il s'agit de $\{C, F\}$.
- Si on choisit B , alors il ne manque que G et la partition devient $\{B, F, G\}$.

Exercice 6.

1) On a $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \{2\}, (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

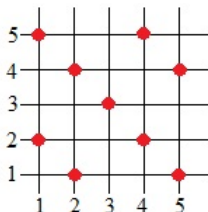
2) a) On peut l'écrire $E = \{1, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

b) On trouve facilement $F = \{1, 3\}^2$ dans la mesure où la seule façon pour une somme de deux nombres entiers d'être paire quand l'un des deux est impair est que l'autre soit impair.

Exercice 7.

f est injective si et seulement si $A \cup B = E$. Elle n'est jamais surjective.

Exercice 8.



Exercice 9.

1) Réflexivité (une droite est parallèle à elle-même), symétrie (si $D // D'$, alors $D' // D$) et transitivité (propriété de cinquième).

2) On construit la surjection : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D}_0 \\ D & \longmapsto & D_0 \end{array}$ qui va de l'ensemble des droites du plan dans l'ensemble des droites passant par l'origine et qui à chaque droite du plan associe celle qui est parallèle passant par O , notée D_0 . Toutes les droites d'une même classe s'envoient sur la même image et deux droites qui ne sont pas dans la même classe (i.e. pas parallèles) n'ont pas la même image, d'où la bijection sur les classes.

Exercice 10.

Réflexivité : On a $A \mathcal{R} A$ car $A \cap A = A$ et $\overline{A} \cap \overline{A} = \overline{A}$. Donc l'assertion $(x \in A \cap B) \vee (x \in \overline{A} \cap \overline{B})$ est une tautologie.

Symétrie : Si ARB , alors BRA , cela tient au fait que $\cap$ est symétrique et $A \cap B = B \cap A$, de même que $\overline{A \cap B} = \overline{B \cap A}$.

Transitivité : Si ARB et BRC , alors $(x \in A \cap B \text{ ou } x \in \overline{A \cap B})$ et $(x \in B \cap C \text{ ou } x \in \overline{B \cap C})$. Quatre cas à considérer avec deux impossibilités : $x \in A \cap B$ et $x \in \overline{A \cap B}$ puisque x serait à la fois dans B et dans $\overline{B}$. Idem avec $x \in \overline{A \cap B}$ et $x \in B \cap C$.

Il ne reste donc plus que deux cas : $x \in A \cap B$ et $x \in B \cap C$, ce qui donne $x \in A \cap C$. Ou alors $x \in \overline{A \cap B}$ et $x \in \overline{B \cap C}$ qui implique $x \in \overline{A \cap C}$.

Exercice 11.

1) Par permutation circulaire :

- i) $\Rightarrow$ ii) : Par double inclusion, soit $z \in \hat{x}$, alors xRz et par transitivité, yRz , donc $z \in \hat{y}$.

Ainsi $\hat{x} \subset \hat{y}$. Idem dans l'autre sens.

- ii) $\Rightarrow$ iii) : On a toujours $x \in \hat{x}$, grâce à la réflexivité, donc $x \in \hat{x} \cap \hat{y}$ qui est non vide.

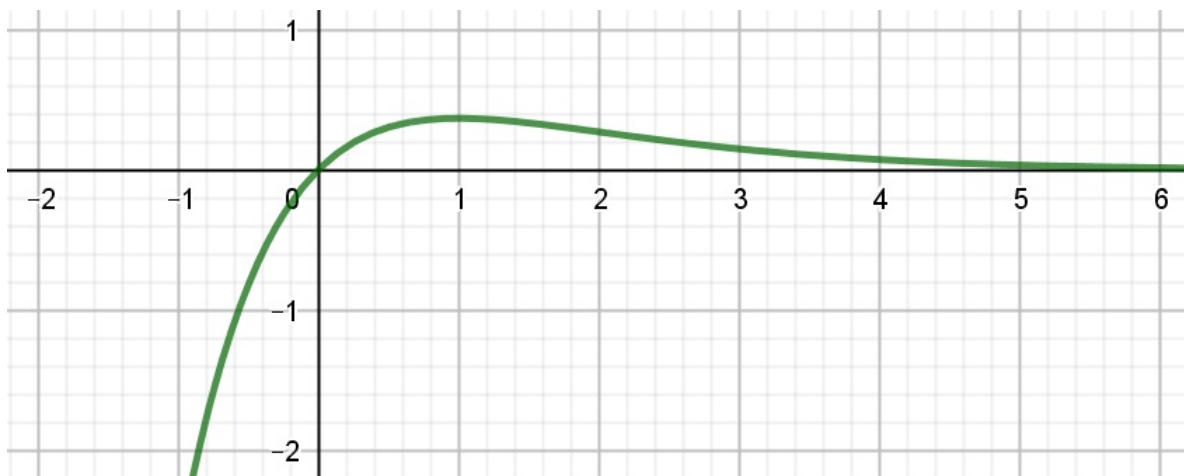
- iii) $\Rightarrow$ iv) : Par hypothèse, il existe $z \in \hat{x} \cap \hat{y}$. Donc xRz et yRz . Ainsi $\{x, y\} \subset \hat{z}$.

- iv) $\Rightarrow$ i) : Si $\{x, y\} \subset \hat{z}$, alors xRz et yRz et par transitivité, xRy .

2) Il suffit de considérer $\neg(\text{ii}) \Leftrightarrow \text{iii})$.

3) L'astuce est de voir que l'équation est séparable i.e. on peut transposer tous les x d'un côté et tous les y de l'autre : $xe^y = ye^x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y}$. En posant $f(x) = \frac{x}{e^x}$, on trouve ma relation d'équivalence classique associée à une application : $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

4) Il faut faire l'étude de la fonction dont le graphe est :

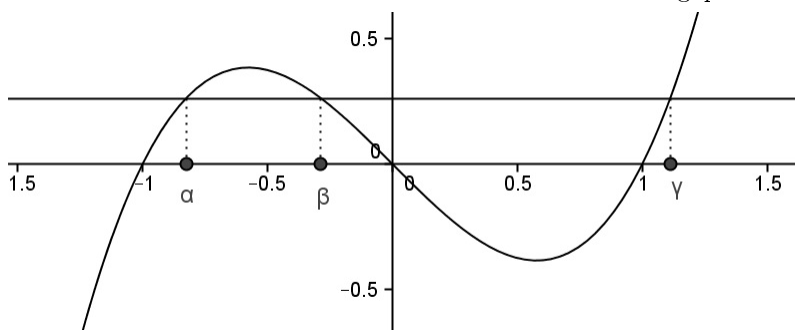


On voit donc que si $x \in]-\infty, 0] \cup \{1\}$, alors la classe est réduite à un singleton. Si $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, alors la classe est un couple.

Exercice 12.

1) On utilise la séparation : $a^3 - b^3 = a - b \Leftrightarrow a^3 - a = b^3 - b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ avec $f(x) = x^3 - x$.

2) Deux réels sont donc dans la même classe d'équivalence si et seulement si ils ont même image par f . On trace donc des droites horizontales et on cherche les antécédents :



Sur cet exemple, la classe de α contient trois éléments : $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

On cherche donc les points charnières qui correspondent aux extrema. On pose δ le réel en lequel le minimum est atteint. On a alors $f'(\delta) = 0 \Leftrightarrow 3\delta^2 - 1 = 0$. Comme $\delta > 0$, on a $\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Il reste à trouver l'autre antécédent (négatif) de $f(\delta) = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$. Soit à résoudre :

$$f(x) = \frac{-2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x^3 - x = \frac{-2}{3\sqrt{3}} \quad (*)$$

Or $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est racine bien sûr. Donc

$$(*) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0.$$

Ainsi, si $x \in [0, \frac{2}{\sqrt{3}}] \setminus \{\frac{1}{\sqrt{3}}\}$, alors la classe d'équivalence contient trois éléments.

Si $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors il n'y a que deux éléments dans la classe d'équivalence.

Si $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$ alors l'élément est seul dans la classe.

Idem pour les négatifs par symétrie.

Exercice 13.

Réflexivité, symétrie et transitivité ne posent pas de problème dès l'instant où on se rend compte que l'équation est séparable : $(x, x')\mathcal{R}(y, y') \Leftrightarrow x - x' = y - y'$.

Pour la classe de $(1, 2)$, on cherche les couples (x, x') tels que $x - x' = 1 - 2 = -1$. Sur le plan (Oxx') , il s'agit de la droite d'équation $x = x' - 1$.

Exercice 14.

1) Réflexivité, symétrie et transitivité ne posent pas de problème.

2) On cherche, pour (α, β) fixé, les couples (x, y) tels que $xy = \alpha\beta$, autrement dit $y = \frac{\alpha\beta}{x}$. Il s'agit donc des points d'une hyperbole si $\alpha\beta \neq 0$ et des deux axes sinon.

3) Non. $(1, 0)\mathcal{R}(0, 1)$ et $((0, 1)\mathcal{R}(-1, 0))$.

4) a) On transporte les trois propriétés par inclusion.

b) $\mathcal{E}l(1, 1) = \{(1, 1), (-1, -1)\}$, $\mathcal{E}l(1, 0) = \mathbb{Z} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{Z}$ et $\mathcal{E}l(3, 4) = \{(1, 12), (2, 6), (3, 4), (-1, -12), (-2, -6), (-3, -4)\}$.

Exercice 15.

1) C'est une relation d'ordre. Le plus long est la transitivité qui nécessite l'étude de quatre cas. L'ordre est total.

3) On appelle $p_x(A)$ la projection de tout ensemble $A \subset [0; 1]^2$ sur l'axe des abscisses. On pose $\alpha = \sup(p_x(A))$. Deux cas se présentent (en fonction de la fermeture à droite) :

- Si le sup est atteint (i.e. $\alpha \in p_x(A)$), alors $\sup(A) = (\alpha, \sup(p_y(A_\alpha)))$ où $A_\alpha = \{(\alpha, y) \in A\}$.

- Si le sup n'est pas atteint (i.e. $\alpha \notin p_x(A)$), alors $\sup(A) = (\alpha, 0)$.

En fait, il suffit de prendre $(\sup(p_x(A), \sup(p_y(A)))$.

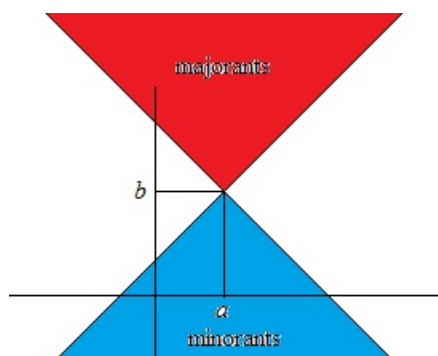
Exercice 16.

1) Réflexivité : ok.

Antisymétrie : Si $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$ et $(x', y') \preccurlyeq (x, y)$, alors $|x' - x| \leq y' - y$ et $|x - x'| \leq y - y'$. Mais l'un des deux nombres opposés $y - y'$ et $y' - y$ est négatif. Donc $|x - x'| = 0 \Leftrightarrow x = x'$. Et $y = y'$.

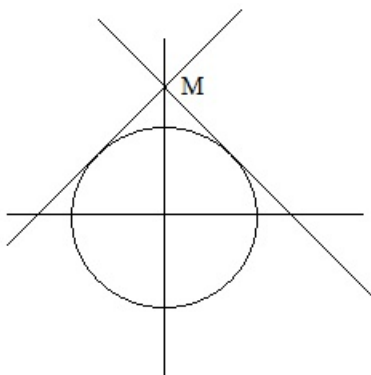
Transitivité : Si $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$ et $(x', y') \preccurlyeq (x'', y'')$, alors $|x' - x| \leq y' - y$ et $|x'' - x'| \leq y'' - y'$. On veut un majorant de $|x - x''|$ et on utilise l'inégalité triangulaire après un caprice : $|x - x''| = |x - x' + x' - x''| \leq |x - x'| + |x' - x''| \leq y' - y + y'' - y' \leq y'' - y$.

2)



3) Non. Il suffit de voir que l'on ne peut pas comparer deux points de même ordonnée par exemple (ou sur le dessin précédent, que certains points ne sont ni majorants, ni minorant de (a, b)).

4)



La borne sup est le point M car il est bien majorant (dans tous les cônes de majoration de chacun des points du disque) et il est minimal (tout point d'ordonnée inférieure et d'abscisse différente serait à l'extérieur du cône de l'un des points du disque).

Exercice 17.

- 1) Bijective
- 2) Ni injective ni surjective.
- 3) Ce n'est pas une application.
- 4) Injective. Pas surjective.
- 5) Bijective.

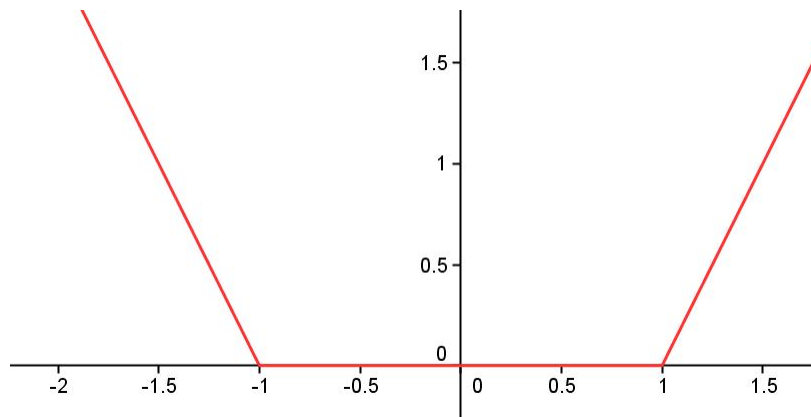
Exercice 18.

- 1) a) On a clairement $f(x_0) = f(-x_0)$, donc f est paire et non injective.

b)

x	$x < -1$	$-1 \leq x \leq 1$	$x > 1$
$f(x)$	$-2x - 2$	0	$2x - 2$

c)



L'ensemble image est donc $f(\mathbb{R}) = [0; +\infty[$ et l'application n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$

- 2) a) D'après l'étude de l'expression qui précède, on a sur E l'expression de $f : f(x) = 2x - 2$.
 b) L'application réciproque existe car f est bijective de E sur F dans ce cas et il faut résoudre :

$$y = 2x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y + 2}{2}.$$

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{2}}.$

Exercice 19.

- 1) Tout X a une image, donc il s'agit d'une application. Elle est bijective.
- 2) Ce n'est pas une application, le couple $(0, 0)$ ayant une infinité d'images (n, n) .
- 3) L'application est bien surjective car chaque entier n peut s'écrire $1 \times n$, mais elle n'est pas injective car $(1, 6)$ et $(2, 3)$ ont la même image.

Exercice 20.

minorants : $-1; 0$, majorants : $1; 2; \pi$, le plus petit élément : 0 , le plus grand élément : y'en a pas, la borne inf : 0 et la borne sup : 1 .

Exercice 21.

- 1) $\text{card } \mathcal{P} = 2^n$.
- 2) On veut montrer que $X \preccurlyeq Y$. Pour cela, il faut montrer que pour tout $B \in Y$, il existe $A \in X$ qui contient B . On regarde donc pour les six éléments de Y et on trouve $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$, $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$, $\{d, e\} \subset \{d, e\}$, $\{c\} \subset \{a, b, c\}$, $\{d\} \subset \{d, e\}$ et $\{e\} \subset \{d, e\}$.
 Idem pour $Y \preccurlyeq X$.
- 3) On a clairement $\preccurlyeq$ réflexive car pour tout $B \in X$, on a $B \subset B$. Donc $X \preccurlyeq X$.
 Pour la transitivité, on pose $X \preccurlyeq Y$ et $Y \preccurlyeq Z$. Alors pour tout $B \in Y$, il existe $A \in X$ tel que $B \subset A$. De même, $C \in Z$, il existe $B \in Y$ tel que $C \subset B$. Donc pour tout $C \in Z$, il existe $A \in X$ tel que $C \subset B \subset A$, ce qui prouve $X \preccurlyeq Z$.
- 4) a) Recouvrement disjoint.
 b) La relation reste réflexive et transitive. Montrons qu'elle est antisymétrique sur les partitions.
 On écrit $X = \{A_1, \dots, A_n\}$ et $Y = \{B_1, \dots, B_m\}$. Si $X \prec Y$ et $Y \prec X$, montrons que $m = n$ et que les A_i et les B_j sont identiques.

On sait que pour tout i , il existe j tel que $A_i \subset B_j$. De même, pour ce j , il existe un k tel que $B_j \subset A_k$. Mais alors $A_i \subset A_k$. Du fait de la partition, $i = k$ et $A_i = B_j$, d'où $X = Y$.

c) La partition $Y = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$ est le plus grand élément car quelle que soit la partition X , il existe toujours un élément de X qui contient un singleton pour tout singleton.

