Feuille d'exercices $n°$2

Dénombrements

Exercice 1. ♪

On considère un jeu de 32 cartes. Déterminer le nombre de

1) mains de 5 cartes.

2) mains de 5 cartes contenant

a) exactement un valet.
b) exactement trois piques.
c) au moins un roi.
d) exactement une paire.
e) exactement deux paires.
f) exactement un brelan.
g) une quinte flush.
h) une couleur.
i) une suite.
j) un full.
k) un carré.
l) exactement un valet et 2 paires.
m) exactement un roi et 3 piques.

Exercice 2. ♪

De combien de façons peut-on garer 10 voitures dans un parking comprenant 20 places ?

Exercice 3. ♪

Nombre d'anagrammes des mots CRAYON et MISSISSIPPI.

Exercice 4. ♪

Un mille-pattes dispose de 21 paires de bottes différentes (pieds gauches différents des pieds droits). Il les prend au hasard pour les enfiler sur chacune de ses 42 pattes. Combien y a-t-il de manières différentes d'être chaussé ?

Exercice 5. ♩

Combien peut-on fabriquer de colliers distincts avec n perles de couleurs distinctes. (Attention, le fermoir laisse passer les perles !)

Exercice 6. ♪

Il y a sur le quai 25 voyageurs dont deux ont des tickets $1^{\text{ère}}$ classe. Ils attendent le métro et une rame de 5 voitures vides dont une de première classe, arrive.

1) Sachant qu'il est 7h, il n'y a pas de distinction entre première et seconde classe. Calculer le nombre de manières de répartir les voyageurs dans la rame.

2) Il est 10h, seuls les voyageurs munis d'un ticket de première classe ont accès à la voiture de première classe. Calculer le nombre de manières de répartir les voyageurs dans les 5 voitures.

Exercice 7. ♩

J'ai quinze paires de chaussettes de quinze couleurs différentes. Je les range en vrac dans ma commode qui contient cinq tiroirs. De combien de façons différentes puis-je le faire ?

Exercice 8. ♩

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer le nombre d'applications de E dans $\{1, 2, 3\}$.

2) Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 9. ♩ *Un must !*

Soit E un ensemble de cardinal n. Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que :

1) $A \cap B = \emptyset$.

2) $A \cup B = E$.
3) $A \subset B$.

Exercice 10.
1) Calculer

$$S = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} \qquad D = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} ... + (-1)^n \binom{n}{n}$$
$$P = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... \qquad I = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} ...$$

2) Démontrer sans utiliser la formule de cours que pour $1 \leq p \leq n-1$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$
En déduire que $\binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1}$ et démontrer la **formule d'itération de Pascal** :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

3) Démontrer la **formule de Vandermonde** (il n'y a aucun calcul à faire !) :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$$

En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
4) Calculer

$$A = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \qquad B = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} \qquad C = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$$
$$D = \sum_{k=n}^{p} (k+1)\binom{k}{n} \qquad E = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)...(k+p-1)$$

Exercice 11. *Spécial combinaisons avec répétitions.*
On se propose de démontrer la formule :

$$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

On note pour $p \geq 1$, F l'ensemble des applications croissantes de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$. On voudrait démontrer que $\Gamma_n^p = \mathrm{card}(F)$.

1) Persuadez-vous que $\Gamma_n^1 = n$.
On suppose $p \geq 2$ et $f \in F$.

2) On considère $g : \begin{array}{ccc} [\![1;p]\!] & \longrightarrow & [\![1;n+p-1]\!] \\ x & \longmapsto & g(x) = f(x) + x + 1. \end{array}$

a) Montrer que g est strictement croissante.
On note G l'ensemble des applications **strictement** croissantes de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n+p-1]\!]$. On veut, dans cette question, construire une bijection φ de F dans G. Aussi, A tout $f \in F$, on associe une application $\varphi(f) = g$ définie par : $g : \begin{array}{ccc} [\![1;p]\!] & \longrightarrow & [\![1;n+p-1]\!] \\ x & \longmapsto & g(x) = f(x) + x - 1 \end{array}$.

b) Montrer que $\mathrm{card}(G) = \binom{n+p-1}{p}$.
c) Montrer que φ est injective.
d) Montrer par récurrence sur x que $\forall x \in [\![1;p]\!]$, $x \leq g(x) \leq x + n - 1$.
On pose $f : x \longmapsto g(x) - x + 1$.
e) Déduire de la question précédente que l'application f est bien à valeur dans $[\![1;n]\!]$.
f) Montrer que f est bien croissante.
g) En déduire que φ est surjective puis que $\Gamma_n^p = \mathrm{card}(F)$.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) $\binom{32}{5}$.

2) **a)** $\binom{4}{1}\binom{28}{4}$.

b) $\binom{8}{3}\binom{24}{2}$.

c) $\binom{32}{5}-\binom{28}{5}$.

d) $\binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{3}4^3$.

e) $\binom{8}{2}\binom{4}{2}^2\binom{24}{1}$.

f) $\binom{8}{1}\binom{7}{2}4^2$.

g) 4×4.

h) $\binom{4}{1}\binom{8}{5}-4\times 4$.

i) 4×4^5.

j) $\binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{1}\binom{4}{2}$.

k) $\binom{8}{1}\binom{24}{1}$.

l) $\binom{4}{1}\binom{7}{2}\binom{4}{2}^2$.

m) $\binom{3}{1}\binom{7}{3}\binom{21}{1}+1\times\binom{7}{3}\binom{21}{1}$.

Exercice 2.

A_{20}^{10}

Exercice 3.

$6!$ et $\frac{11!}{4!4!2!}$

Exercice 4.

$\frac{42!}{(21!)^2}$

Exercice 5.

Si l'on compte un tirage avec ordre et sans remise, on $n!$ possibilités. Mais il faut compter les rotations (il y en a n au total et la réflexion, soit $2n$ configuration qui donnent le même collier à chaque fois. On a donc au total $\dfrac{n!}{2n}=\boxed{\dfrac{(n-1)!}{2}}$.

Exercice 6.

1) 5^{25}

2) $5^2\times 4^{23}$

Exercice 7.

On considère l'univers avec ordre et avec remise. On suppose dans un premier temps que les pieds des chaussettes sont distingués. On a alors $\mathrm{card}(\Omega)=5^{30}$.
Si l'on considère que deux chaussettes de la même paire sont identiques, alors il faut quotienter l'univers précédent par l'ordre. Pour cela, il faut compter les issues pour lesquelles les 15 paires sont dans les mêmes casiers : 5^{15},
une seule paire est séparée : $5^{14}\times 5\times 4$.... et ainsi de suite

Exercice 8.

1) 3^n

2) $3^n-3\times 2^n+3\times 1$

Exercice 9.

1) - Version bourrine : On choisit un ensemble A de k éléments dans E. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités pour A. Puis B de 2^{n-k} façons. En effet, pour construire B, on complète A avec un sous ensemble de $E \backslash A$ qui a $n-k$ éléments. D'où le nombre de couples cherché : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$ par la **formule du binôme de Newton**.

- Version rusée : Pour définir un tel couple, il suffit de déterminer, pour chaque élément de E, s'il appartient aux deux ensembles, à A mais pas à B, ou à aucun des deux. Il y a donc trois possibilités pour chaque élément., donc 3^n possibilités au total. (il suffit d'exhiber une bijection entre l'ensemble des couples (A, B) et l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1, 2\}$.

2) idem.

3) idem.

Exercice 10.

1) $S = 2^n$, $D = 0$, $2P = S + D \quad \Leftrightarrow \quad P = 2^{n-1}$, $I = 2^{n-1}$.

2) Il faut utiliser un télescopage.

3) On peut le voir facilement avec un ensemble à $n_1 + n_2$ éléments dont on veut choisir n éléments. On peut le faire directement (terme de droite) ou en choisissant k éléments dans la partie qui en contient n_1 et $n-k$ dans l'autre.

Une autre façon est d'identifier le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{n_1+n_2}$ avec celui de x^n dans le développement de $(1+x)^{n_1}(1+x)^{n_2}$

4) $A = n2^{n-1}$ en remarquant que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$,

$B = n(n+1)2^{n-2}$ avec la même technique car $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$,

$C = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ et $D = (n+1)\binom{n+2}{p+2}$ grâce à la formule d'itération de Pascal et le fait que $(k+1)\binom{n}{k} = (n+1)\binom{n+1}{k+1}$.

Quant au dernier, on remarque que $k(k+1)...(k+p-1) = p!\binom{k+p-1}{p}$, d'où $E = p!\binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 11.

1) Il suffit d'y croire.

2) **a)** $g(x+1) - g(x) = f(x+1) - f(x) + 1 > 0$.

b) On doit donc choisir les images de chacun des entiers de $[\![1; p]\!]$ dans $[\![1; n+p-1]\!]$, ce qui revient à tirer p entiers parmi $n+p-1$ sans remise puisque l'application est strictement croissante et sans ordre car : étant donnés $n+p-1$ entiers distincts, il n'existe qu'une seule façon de les ordonner pour les ranger dans l'ordre croissant (strict car ils sont distincts).

Soit $\text{card}(G) = \binom{n+p-1}{p}$.

c) Si $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$, alors on a pour tout $x \in [\![1; p]\!]$, $f_1(x) + x - 1 = f_2(x) + x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) = f_2(x)$. Donc $f_1 = f_2$.

d) On démontre que $x \leq g(x)$ par récurrence classique en utilisant la stricte croissance de g : On a $x \leq g(x) < g(x+1)$, d'où $x+1 \leq g(x+1)$.

Pour l'autre inégalité, on utilise une récurrence descendante en vérifiant que l'inégalité est vérifiée pour $x = p$, et la stricte croissance, là encore donne : $g(x-1) < g(x) \leq x+n-1$, donc $g(x-1) \leq x+n-2$.

e) En appliquant l'inégalité précédemment trouvée, on a bien $1 \leq f(x) \leq n$.

f) $f(x+1) - f(x) = g(x+1) - g(x) - 1 \geq 0$ car $g(x+1) - g(x)$ entier non nul.