Feuille d'exercices $n°4$

V.A.R. discrètes et finies

EN2D2 — Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♩

Soient A et B deux évènements indépendants. Soient X_A et X_B les variables indicatrices de A et B respectivement et $X = X_A + X_B$.

Montrer que $\sup(p(X=0), p(X=1), p(X=2)) \geq \dfrac{4}{9}$.

Exercice 2. 𝅘𝅥𝅯

Dans une urne, on dispose de huit jetons numérotés de la façon suivante : quatre jetons numérotés 1, trois jetons numérotés 2, un jeton numéroté 3 et on dispose d'un dé équilibré.
On tire au hasard un jeton puis on lance le dé. On note le numéro du jeton et la valeur du dé.

1) Déterminer l'univers Ω.
2) On désigne par X_1 la var associant à chaque épreuve le numéro obtenu par le jeton.
  a) Déterminer $X_1(\Omega)$ puis la loi de probabilité de X_1.
  b) Représenter la loi de probabilité de X_1 par un diagramme bâtons.
  c) Déterminer la fonction de répartition de X_1 puis donner sa représentation graphique.
  d) Déterminer $E(X_1)$ puis $V(X_1)$.
3) Soit X_2 la var associant à chaque épreuve la valeur du dé.
  a) Déterminer $X_2(\Omega)$.
  b) Déterminer la loi de probabilité de X_2.
4) Soit X_3 la var associant à chaque épreuve la somme des deux nombres obtenus.
  a) Déterminer $X_3(\Omega)$.
  b) Ecrire X_3 en fonction de X_1 et X_2.
  c) Calculer $p(X_3 = 2)$ et $p(X_3 = 6)$.
5) Soit X_4 la var associant à chaque épreuve le plus grand des deux nombres obtenus.
  a) Déterminer $X_4(\Omega)$.
  b) Ecrire X_4 en fonction de X_1 et X_2.
  c) Calculer pour $k \in X_4(\Omega)$, les probabilités $p(X_4 \leq k)$.
  d) En déduire la loi de probabilité de X_4.
6) Soit X_5 la var associant à chaque épreuve le plus petit des deux nombres obtenus.
  a) Déterminer $X_5(\Omega)$.
  b) Calculer $p(X_5 = 3)$, $p(X_5 = 1)$ et $p(X_5 = 2)$.

Exercice 3. *(CERDI 2012)* 𝅘𝅥𝅯

On note X la variable aléatoire suivant la distribution f telle que :

$$f(n) = \frac{3!}{n!(3-n)!}\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{3-n} \qquad \text{pour } n \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

1) Calculer $E(X)$ et $E(X(X-1))$.
2) En déduire $\sigma(X)^2$.

Exercice 4. ♪

Un lot de 10 pièces contient 3 pièces défectueuses. On en tire simultanément 2 du lot. Soit X le nombre de pièces défectueuses parmi les pièces tirées.

1) Quelle est la loi de X ?
2) Préciser $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 5. ♪

Dans un examen à correction automatique, on pose 10 questions. Chaque question comporte 5 réponses dont une seule est exacte. Pour chaque question, le candidat doit cocher sa bonne réponse. Un candidat qui ne se fie pas à son savoir décide de procéder au hasard.
Quelle est la probabilité que le candidat ait au moins la moyenne ?

Exercice 6. ♩

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 2 boules simultanément. On appelle X le plus grand des deux numéros tirés. Déterminer la loi de X et $E(X)$.

Exercice 7. ♩

Un spot se déplace sur une droite à partir de l'origine. A chaque seconde, il se déplace d'une unité vers la droite avec la probabilité p ou vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. La variable aléatoire X est l'abscisse au bout de n secondes.
Déterminer la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 8. 𝅗𝅥

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules une à une sans remise et on s'arrête dès que le numéro tiré est strictement supérieur au précédent (ou quand il n'y a plus de boules évidemment).
Soit X la v.a.r. égale au nombre de tirages effectués.

1) Préciser $X(\Omega)$. Calculer $p(X = 2)$ et $p(X > 2)$.

2) Pour $k \geq 2$, préciser $p(X > k)$ et en déduire la loi de X.

Exercice 9. ♩

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère n boîtes numérotées $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$. Un objet est caché dans l'une de ces boîtes (de façon équiprobable) et on cherche à le localiser, c'est-à-dire à connaître le numéro de la boîte qui le contient. Pour cela, on ouvre successivement les boîtes B_1, B_2,... jusqu'à ce que l'on puisse déterminer à coup sûr dans quelle boîte se trouve l'objet.
Soit X la var égale au nombre de boîtes ouvertes.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 10. 𝅗𝅥

Soient n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $n \geq p$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue un tirage de p boules.

1) On suppose dans cette question que les tirages s'effectuent sans remise. Soient X la var égale au plus grand numéro obtenu et Y la var égale au plus petit numéro obtenu.

a) Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.

b) Déterminer la loi de Y, ainsi que son espérance.

2) On suppose dans cette question que les tirages s'effectuent avec remise. Soient Z la var égale au plus grand numéro obtenu. Déterminer la loi de Z ainsi que son espérance.

Exercice 11. ♩

On dispose d'une urne contenant 3 objets A,B et C. Le jeu consiste en une succession de tirages d'un objet avec remise dans l'urne après chaque tirage.
A chaque tirage, le joueur :
- gagne 1€ s'il tire l'objet A,
- ne perd ni ne gagne s'il tire l'objet B,
- perd tout ce qu'il a gagné s'il tire l'objet C.

On note X_n la var égale au gain au bout de n tirages.

1) Déterminer les lois de X_1 et X_2.

2) Calculer $p(X_n = n)$ en fonction de n.
3) Exprimer $p(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $p(X_n = 0)$. En déduire $p(X_n = 0)$ en fonction de n.
4) Soient a et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que $p(X_{n+1} = a) = \frac{1}{3}p(X_n = a) + \frac{1}{3}p(X_n = a-1)$.
Trouver une relation entre $E(X_{n+1})$ et $E(X_n)$. En déduire $E(X_n)$ en fonction de n.

Exercice 12. *La loi multinomiale.* ♩
On lance 5 fois de suite un dé équilibré. Quelles sont les probabilités des évènements :
1) On obtient deux fois un nombre pair et une fois le 1, une fois le 3, une fois le 5.
2) On obtient trois fois un nombre pair et jamais un nombre premier.
3) On obtient trois fois un nombre premier et une fois le 4.
4) On obtient au moins une fois le nombre 2 et au plus deux fois un nombre pair.
5) On obtient au moins une fois le nombre 2 et trois fois un nombre pair.

Exercice 13. ♩
Dans un bassin, nagent $R = 100$ poissons rouges, $B = 200$ poissons bleus, $J = 300$ poissons jaunes, $G = 400$ poissons gris, indépendamment les uns des autres. Un coup d'épuisette ramène, au hasard un nombre $n < 100$ de poissons de diverses couleurs, chaque poisson ayant la même "chance" d'être pêché.
1) Sachant qu'un coup d'épuisette a capturé, au hasard, n poissons, quelle est la probabilité d'avoir obtenu exactement r poissons rouges, b poissons bleus, j poissons jaunes et g poissons gris, avec $r + b + j + g = n$?
2) Application numérique : Le coup d'épuisette a ramené 10 poissons. Quelle est la probabilité que ce coup d'épuisette soit constitué de 2 poissons rouges, 2 poissons bleus,3 poissons jaunes et 3 poissons gris.

Exercice 14. ♩
On désigne par n un entier naturel avec $n > 1$. Un sac contient des boules rouges et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules rouges est p où $0 < p < 1$, celles des boules blanches est $q = 1 - p$. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule tirée après chaque tirage selon la règle suivante :
- dès qu'une boule rouge est tirée, on arrête les tirages ;
- si les n premières boules sont blanches, on arrête les tirages.

1) Soit Ω l'ensemble des suites de couleur de boules que l'on peut tirer suivant cette règle.
a) Déterminer Ω.
b) Déterminer la probabilité de chacun des évènements élémentaires pour cette expérience.
2) On note N, X_1, X_2 les v.a.r. représentant respectivement le nombre de tirages effectués, le nombre de boules blanches tirées et le nombre de boules rouges tirées.
a) Déterminer la loi de la var X_2, puis calculer $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
b) Déterminer la loi des variables aléatoires X_1 et de N.