Feuille d'exercices $n°$6

V.A.R. discrètes

EN2D2 — Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♪

On jette une pièce de monnaie et on se demande quelle est en moyenne le nombre de coups consécutifs.

Exercice 2. ♩

Un concierge possède un trousseau de dix clefs dont une seule permet d'ouvrir la porte en face de lui. Soit X le nombre de clefs essayées pour ouvrir la porte.

1) Déterminer la loi de X *(On envisagera deux cas, avec puis sans remise).*

2) Le concierge est ivre un jour sur trois.

Quand il est ivre, il essaie les clefs au hasard avec remise, sinon, on procède sans remise. Sachant qu'un jour huit essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour-là ?

Exercice 3. ♪

Le nombre d'exemplaires d'un journal A demandés chaque jour à un gérant d'un hospice est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(8)$. La recette de chaque vente est de 1€.

1) Calculer la recette moyenne.

2) Le stock est de 10 exemplaires. Quelle est la probabilité que le gérant ne puisse satisfaire toutes les demandes ? Quelle est alors la recette moyenne ?

Exercice 4. ♩

On donne $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p(X = k) = \frac{4}{k} p(X = k-1)$. Montrer que X suit une loi de Poisson.

Exercice 5. ♪

Une bactérie a la probabilité p d'être touchée par un laser. On envoie un rayon laser chaque seconde. La bactérie ne meurt que lorsqu'elle est touchée r fois ($r \in \mathbb{N}*$, fixé). Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale à la durée de vie de la bactérie ainsi que son espérance de vie.

Exercice 6. ♩

Le nombre X de touristes sur les Ramblas de Barcelone suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Sur cette avenue, chaque touriste a la probabilité p fixe de se faire voler son portefeuille. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au nombre de portefeuilles volés et calculer son espérance.

Exercice 7. ♩

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p(X = 2k)$.

La variable X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?

2) Idem si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$ (on pourra se ramener à l'étude des solutions de l'équation différentielle $y' + y = e^{\lambda}$).

Exercice 8. ♩

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit une variable aléatoire Y par

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ est impair.} \\ \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y si :

1) si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$. **2)** si X suit $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$.

Exercice 9. ♩

Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ p\left[(X=j) \cap (Y=k)\right] = \frac{(j+k)\lambda^{k+j}}{e^{2\lambda} j!k!} \text{ avec } \lambda > 0.$$

1) Déterminer λ.
2) Trouver les lois de X, de Y. Sont-elles indépendantes ?
3) Calculer $E(2^{X+Y})$.

Exercice 10. ♩

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p(X=k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$.
1) Déterminer a.
2) La variable aléatoire X admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 11. 𝅗𝅥

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. On appelle succès le fait d'obtenir un 6.
1) On note T_n le nombre de lancers qu'il faut pour obtenir un n^e succès.
a) Déterminer la loi de probabilité de T_n, son espérance mathématique, sa variance.
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} (t-pt)^k = \frac{1}{(1-(t-pt))^n}$.
c) En déduire la fonction génératrice de T_n.
2) On note Y_n le nombre d'échecs précédant le n^e succès. Déterminer la loi de probabilité de Y, sa fonction génératrice, son espérance mathématique, sa variance.

Exercice 12. ♩

Un livre compte quatre erreurs. Lors d'une relecture, la probabilité qu'une erreur soit corrigée est $0,3$. Calculer le nombre minimal de relectures pour que la probabilité que toutes les erreurs soient corrigées soit supérieur ou égale à $0,95$.

Exercice 13. 𝅗𝅥

Dans chacun de mes paquets de céréales "SnowFlakes" il y a une figurine de Blanche neige et les sept nains (huit figurines différentes au total). Combien faut-il que j'achète de paquets en moyenne pour avoir les huit figurines ?