Feuille d'exercices $n°$7

Intégrales

EN2D2 Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1.

Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

1) $I_1 = \int_{-1}^{1} (t+1)(t+2)^2 dt$,

2) $I_2 = \int_{0}^{4} \sqrt{x}\,(x - 2\sqrt{x})\,dx$,

3) $I_3 = \int_{1}^{2} 3^u du$,

4) $I_4 = \int_{1}^{4} \dfrac{1}{y\sqrt{y}} dy$,

5) $I_5 = \int_{0}^{1} \dfrac{y^4}{\sqrt[3]{1+7y^5}} dy$

6) $I_6 = \int_{1}^{2} \dfrac{a^2}{\sqrt{1+a^3}} da$,

7) $I_7 = \int_{1}^{2} \dfrac{2\sqrt{c}}{2+3c^{3/2}} dc$,

8) $I_8 = \int_{1}^{e} \dfrac{(\ln b)^5}{b} db$,

9) $I_9 = \int_{0}^{(\ln 2)/2} \dfrac{e^{2t}}{e^{2t}+2} dt$,

10) $I_{10} = \int_{e}^{e^3} \dfrac{\ln(3\gamma)}{\gamma} d\gamma$,

11) $I_{11} = \int_{0}^{2} \beta^4 \exp(-\beta^5) d\beta$,

12) $I_{12} = \int_{1/2}^{3/2} \dfrac{1-\alpha}{(\alpha^2 - 2\alpha)^4} d\alpha$,

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

1) $A = \int_{-1}^{1} xe^{3x} dx$,

2) $B = \int_{0}^{1} (t^2+t)e^{2t} dt$,

3) $C_n = \int_{1}^{e} u^n \ln(u) du$,

4) $D = \int_{\sqrt{e}}^{e} \dfrac{\ln(v)}{v} dv$,

5) $E = \int_{1}^{4} \sqrt{3s} \ln s ds$,

6) $F = \int_{0}^{1} \dfrac{\ln(1+2t)}{(1+2t)^3} dt$,

7) $G = \int_{1}^{e^2} (2x^3+1)\ln(x) dx$,

8) $H = \int_{0}^{1} y^4 e^y dy$,

9) $I = \int_{1}^{e} z^2 (\ln z)^3 dz$,

10) $J = \int_{0}^{1/2} (1-2x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} dx$

Exercice 3. ♪

Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$. Calculer l'intégrale $I(a) = \int_{a}^{1/a} \dfrac{\ln x}{x} dx$

1) par intégration par parties,

2) en posant le changement de variable $x = 1/t$.

Exercice 4.

A l'aide de changement de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int_{0}^{1} w\sqrt{3w+1} dw \quad (z = 3w+1)$,

2) $B = \int_{1}^{e} \dfrac{\ln t}{t} dt \quad (x = \ln t)$,

3) $C = \int_{0}^{1} \dfrac{dx}{e^x+1} \quad (v = e^x)$,

4) $D = \int_{1/2}^{1} \dfrac{1}{x(x+1)} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) dx \quad (t = \dfrac{x}{x+1})$,

5) $E = \int_{1}^{2} \dfrac{ds}{s(s^3+1)} \quad (\alpha = s^3+1)$,

6) $F = \int_{-1}^{0} \dfrac{u^3 du}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}} \quad (v = u^2+1)$,

7) $G = \int_{0}^{3} \dfrac{t.\ln(t^2+1)}{t^2+1} dt \quad (x = t^2+1)$

Exercice 5.

Déterminer pour chacune des intégrales suivantes, si elle est impropre ou pas. Faire l'étude des convergences et les calculs quand elles convergent.

1) $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}dt$ **4)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln x+1}{\ln x-1}dx$ **7)** $\displaystyle\int_1^e t\sqrt{t}\ln t dt$

2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^4-2t^2+1}{t^2}dt$ **5)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2+2t-8}dt$ **8)** $\displaystyle\int_1^e \ln^3 t dt$

3) $\displaystyle\int_1^e \frac{1-\sqrt{\ln t}}{t}dt$ **6)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}dx$ **9)** $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

Exercice 6. ♪

Etudier la monotonie des suites suivantes ($n \in \mathbb{N}^\times$).

$$a_n = \int_0^n \exp(-t^2)dt, \quad b_n = \int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx, \quad c_n = \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3}dx \quad d_n = \int_1^n (1-x)^3 e^x dx,$$

$$e_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx, \quad f_n = \int_1^2 (\ln t)^n dt, \quad g_n = \int_0^1 x\exp(-n^2x)dx, \quad h_n = \int_{-1}^0 x\exp(n^2x)dx,$$

$$i_n = \int_1^{1/n} (\ln y)^3 dy, \quad j_n = \int_1^2 \frac{u^{1/n}}{1+u}du, \quad k_n = \int_0^1 \frac{u}{1+u^n}du, \quad l_n = \int_1^{\ln n} \frac{t}{1-\exp(t)}dt$$

Exercice 7. ♪

On pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$. Vérifier : $\forall x \in [0,+\infty[, \quad 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 8. ♪

On pose $I_n = \int_2^n \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[, \quad \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leqslant \dfrac{1}{x-1}$.

En déduire que $\forall n \geqslant 2$, $\ln n - \ln 2 \leqslant I_n \leqslant \ln(n-1)$.

Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et en déduire un équivalent de $\dfrac{I_n}{\ln n}$.

Exercice 9. ♪

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \dfrac{xdx}{1+x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) Calculer I_1. Que vaut I_2 ?

2) Quel est le signe de I_n ? Donner un encadrement de la suite (I_n).

3) Quelle est la monotonie de la suite (I_n) ? La suite (I_n) est-elle convergente ?

4) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^1 x(1-x^n)dx \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 xdx$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 10. ♪

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 2x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \ln(1-x^2)\right)$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de F.

b) Calculer $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{\sqrt{1-t}}dt$ par une intégration par parties.

c) Calculer $F_1(x)$ par un changement de variables.

d) Calculer $F_2(x) = \displaystyle\int_0^x -2t\ln(1-t^2)dt$.

3) En déduire $F(x)$.

4) L'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)dt$ existe-t-elle ?

Exercice 11. ♩

Résoudre

1) $\dfrac{2}{3}x + \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t^2-1)^2}dt = 0$

2) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{t}{(1-t^2)^2}dt = \frac{2x^3-6x^2+4x+1}{2(x^2-1)}$

Pour s'entraîner :

Exercice 12. *Étude de convergence*

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}} \text{ cv}$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\, dt \text{ cv ssi } \alpha > -1$$

$$\int_{t=e^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)(\ln \ln t)} \text{ dv}$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \ln\Big(\frac{1+t^2}{1+t^3}\Big)\, \mathrm{d}t \text{ dv}$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \Big(2 + (t+3)\ln\big(\frac{t+2}{t+4}\big)\Big)\mathrm{d}t \text{ cv}$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha}\, \mathrm{d}t \text{ cv ssi } \alpha > 1$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}} \text{ dv}$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\, \mathrm{d}t \text{ cv ssi } 0 < \beta - \alpha < 1 \text{ ou } \alpha = 0$$

$$\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t)\, \mathrm{d}t}{(t^2-1)^\alpha} \text{ cv ssi } 0 < \alpha < 1$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha}\, \mathrm{d}t \text{ cv ssi } \alpha < \beta + 1$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} t^\alpha\big(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\big)\, \mathrm{d}t \text{ cv ssi } -1 < \alpha < -\frac{1}{2}$$

Exercice 13. *Fractions rationnelles*

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2} = \pi$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^4} = \frac{5\pi}{32}$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\, \mathrm{d}t = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\, \mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2+a^2)} = \frac{\pi}{1+|a|}$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t^2\, \mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^6(1+t^{10})} = \frac{4-\pi}{20}$$

Exercice 14. *Radicaux*

$$\int_{t=0}^{1} \sqrt{\frac{t}{1-t}}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{t=a}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \pi$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{t^5\, \mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{8}{15}$$

$$\int_{t=-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(4-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{t\, \mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$$

$$\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^{10}+t^5+1}} = \frac{1}{5}\ln\Big(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\Big)$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{t}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Exercice 15. *Exponentielles*

$$\int_{t=2}^{+\infty} \frac{e^t\, \mathrm{d}t}{(e^{2t}-5e^t+6)(e^t-1)} = \ln\Big(\frac{e^2-2}{\sqrt{e^4-4e^2+3}}\Big)$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^4 t + \operatorname{sh}^4 t} = \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$$

Exercice 16. *Divers*

$$\int_{t=0}^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t = 12$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\, \mathrm{d}t = -2\ln 2$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^3}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{32}$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\, \mathrm{d}t = 4\ln 2 - 4 \ (u = \sqrt{1-t}\,)$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = 0 \ (u = 1/t)$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t = \ln 2 - \frac{\pi}{2}\Big(u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\Big)$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1)$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \frac{t\, \mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{2|a|(a^2+1)}$$

Solutions des exercices

Exercice 1.

12) $I_1 = \frac{34}{3}$, $I_2 = \frac{-16}{5}$, $I_3 = \frac{6}{\ln 3}$, $I_4 = 1$, $I_5 = \frac{9}{70}$, $I_6 = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $I_7 = \frac{-4}{9}\ln 5 + \frac{4}{9}\ln 2 + \frac{4}{9}\ln(1+3\sqrt{2})$, $I_8 = \frac{1}{6}$, $I_9 = \frac{-1}{2}\ln 3 + \ln 2$, $I_{10} = 2\ln 3 + 4$, $I_{11} = \frac{-1}{5}e^{-32} + \frac{1}{5}$, $I_{12} = 0$

Exercice 2.

10) $A = \frac{4e^{-3}+2e^3}{9}$, $B = \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}$, $C = \frac{1+ne^{1+n}}{1+2n+n^2}$, $D = \frac{3}{8}$, $E = \frac{-28\sqrt{3}}{9} + \frac{32}{3}\sqrt{3}\ln 2$, $F = \frac{-1}{36}\ln 3 + \frac{1}{9}$, $G = \frac{9}{8} + e^2 + \frac{7e^8}{8}$, $H = 9e - 24$, $I = \frac{2}{27}(1+2e^3)$, $J = \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1$, $K = 1$.

Exercice 3.

1) $I(a) = \left[\ln^2(x)\right]_a^{\frac{1}{a}} - \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$. Donc $2I(a) = \ln^2\frac{1}{a} - \ln^2 a = (-\ln a)^2 - \ln^2 a = 0$. Donc $I(a) = \boxed{0}$.

2) $I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} t\ln\frac{1}{t}\frac{-\mathrm{d}t}{t^2} = \int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = -I(a)$. Donc $I(a) = 0$.

Exercice 4.

1) $A = \frac{116}{135}$.

2) $B = 1$.

3) $C = 1 + \ln 2 - \ln(1+e)$.

4) $D = \frac{1}{2}(\ln^2 2 - \ln^2 3)$.

5) $E = \frac{2}{3}\ln\frac{4}{3}$.

6) $F = 2 - \frac{3}{\sqrt{2}}$.

7) $G = \frac{\ln^2 10}{4}$.

Exercice 5.

1) Pas impropre. Primitive directe qui donne $\left[\frac{-1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$.

2) Impropre en 0. Et on trouve $I = \int_{-1}^{1}\left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right)dt$. Or $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ diverge. Donc l'intégrale diverge.

3) Pas impropre. Changement de variable $u = \ln t$ qui donne $I = \int_0^1 (1-\sqrt{u})du = \boxed{\frac{1}{3}}$.

4) Impropre en e. En faisant un caprice, $I = \int_1^4\left(1 + \frac{2}{\ln x - 1}\right)dx$. On se concentre sur le deuxième terme avec la borne à problème : $\int_e^4 \frac{2}{\ln x - \ln e}dx = e\int_1^{\frac{4}{e}}\frac{2}{\ln X}dX$ en posant $X = \frac{x}{e}$. Or $\ln X \leq X - 1$, donc $\frac{1}{\ln X} > \frac{1}{X-1}$ et comme $\int_1^{\frac{4}{e}}\frac{dX}{X-1}$ diverge. (Faire un changement de variable pour se ramener en 0 éventuellement pour s'en convaincre).

5) Pas impropre car l'intervalle $[0;1]$ ne contient aucun des pôles $\{2;4\}$. La décomposition en éléments simples donne $\frac{2t-1}{t^2+2t-8} = \frac{\frac{1}{2}}{t-2} + \frac{\frac{3}{2}}{t+4}$. D'où $I = \left[\frac{1}{2}\ln|t-2| + \frac{3}{2}\ln|t+4|\right]_0^1 = \boxed{\frac{3}{2}\ln 5 + \frac{-7}{2}\ln 2}$.

6) Pas impropre (Y'a aucune raison pour qu'elle le soit). On procède à un changement de variable $u = \sqrt{x}$, ce qui donne $I = \int_0^1 \frac{u^2+1}{1+u} 2udu = \int_0^1 \left(2u^2 - 2u + 4 + \frac{-4}{u+1}\right) du = \left[\frac{2u^3}{3} - u^2 + 4u - 4\ln|u+1|\right]_0^1 = \boxed{\frac{11}{3} - 4\ln 2}$.

7) Pas impropre. Avec une intégration par parties : $I = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{5}{2}} \ln t\right]_1^e - \int_1^e \sqrt{t} dt = \boxed{\frac{6}{25} e^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{25}}$

8) Pas impropre. Avec des IPP : $I = \boxed{6 - 2e}$.

9) Pas impropre. Par primitive directe : $I = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \boxed{\ln 2}$.

Exercice 6.

Il suffit de distinguer si c'est la borne qui bouge ou l'intégrande :

• Pour (a_n) par exemple, on a

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{n+1} \exp(-t^2)\mathrm{d}t - \int_0^n \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \exp(-t^2)\mathrm{d}t \text{ d'après Chasles.}$$

et comme $\exp(-t^2) > 0$ et que les bornes sont dans le bon sens, on a bien $a_{n+1} - a_n > 0$, donc la suite est strictement croissante.

• Pour (e_n), on utilise :

$$e_{n+1} - e_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\mathrm{d}x \text{ par linéarité de l'intégrale.}$$

qui est négative $[0, 1]$. Donc $e_{n+1} - e_n < 0$ et la suite est décroissante.

• De même, (b_n), (h_n), (i_n), (k_n) sont croissantes et (c_n), (d_n), (f_n), (g_n), (j_n), (l_n) sont décroissantes.

Exercice 7.

L'inégalité demandée est une propriété du cours que l'on peut redémontrer en étudiant la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ qui est négative.

En utilisant la croissance de l'intégrale, on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

car les fonctions sont continues et que les bornes sont dans le bon sens. Et comme $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}$, on obtient la bonne inégalité et le résultat $\lim_{n\to+\infty} I_n = \boxed{0}$.

Exercice 8.

On a clairement $x^2 \geq x^2 - 1 \geq (x-1)^2$. En inversant et en intégrant, on obtient ce qu'il faut. Il reste à intégrer, ce qui donne sans problème l'inégalité demandée : $\forall n \geqslant 2$, $\ln n - \ln 2 \leqslant I_n \leqslant \ln(n-1)$. Par le théorème de comparaison, on trouve $\lim_{n\to+\infty} I_n = \boxed{+\infty}$. Et en divisant par $\ln x$, on trouve facilement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\ln n} = 1$. Donc $\boxed{I_n \sim \ln n}$.

Exercice 9.

1) En faisant un caprice, on trouve $x/(1+x) = 1 - 1/(1+x)$ et $I_1 = 1 - \ln 2$. Aucun problème pour $I_2 = \frac{\ln 2}{2}$ car il s'agit d'une primitive directe.

2) I_n est positive car l'intégrande l'est. En encadrant $\frac{x}{2} \leq \frac{x}{1+x^n} \leq x$, on trouve $\frac{1}{4} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$ (en vérifiant bien que les bornes sont dans le bon sens !!).
3) Comme $1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$, on a $I_{n+1} \geq I_n$ et (I_n) est croissante. Comme elle est majorée par $\frac{1}{2}$, elle est convergente.
4) Il suffit de prouver que $x(1-x^n) \leq \dfrac{x}{1+x^n}$. On calcule ensuite $\displaystyle\int_0^1 x(1-x^n)dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$ qui tend vers $\frac{1}{2}$. Le théorème d'encadrement permet donc de conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 10.
1) $\mathscr{D}_f =]-1;1[$.
2) a) On a encore $\mathscr{D}_F =]-1;1[$.
b) $F_1(x) = 4x\sqrt{1-x} - \dfrac{8}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{8}{3}$ en posant $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ et $v(t) = 2t$.
c) On pose $X = \sqrt{1-t}$.
d) $F_2(x) = [t^2 + (1-t^2)\ln(1-t^2)]_0^x$.
3) $F(x) = F_1(x) + F_2(x) = 4x\sqrt{1-x} - \dfrac{8}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{8}{3} + x^2 + (1-x^2)\ln(1-x^2)$.
4) Il faut vérifier que la limite de $F(x)$ en ± 1 existe.

Exercice 11.
1) L'intégrale donne par primitive directe : $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t^2-1)^2}dt = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2-1}$. On est donc ramené à résoudre $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x(4x^2-3x-4) = 0$. D'où les solutions possibles : $\left\{\dfrac{3-\sqrt{73}}{8}, 0, \dfrac{3+\sqrt{73}}{8}\right\}$.
Or on a utilisé des implications et il faut faire attention aux solutions parasites. Mais $\dfrac{3-\sqrt{73}}{8} \simeq -0,69$ et $\dfrac{3+\sqrt{73}}{8} \simeq 1,44$ et on se rend compte que $1 \in \left[0, \dfrac{3+\sqrt{73}}{8}\right]$ et l'intégrale diverge dans ce cas. D'où les seules solutions : $\boxed{\left\{\dfrac{3-\sqrt{73}}{8}, 0\right\}}$.
2) De la même manière, on résout l'intégrale pour trouver : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{t}{(1-t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-1}$ Soit à résoudre $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{2x^3-6x^2+4x+1}{2(x^2-1)} \Rightarrow x \in \{0,1,2\}$. Mais, là encore, si x vaut 0 ou 1, alors le pôle de divergence 1 est inclus ou une borne de l'intégrale qui diverge. Il ne reste plus comme solution que $\boxed{2}$.