Feuille d'exercices $n°8$

Variables à densité

Exercice 1. ♪

La variable aléatoire X suit $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On donne $p(X < -1) = 0,05$ et $p(X > 3) = 0,12$. Calculer m et σ.

Exercice 2. ♩

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin x dx \text{ et } J_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos x dx.$$

1) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+1} = (n+1)J_n - (2\pi)^{n+1} \text{ et } J_{n+1} = -(n+1)I_n.$$

Calculer I_n et J_n pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2) On pose

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2\pi^2}(1 - \cos x) & \text{si } x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.

Déterminer la fonction de répartition de X.

Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Exercice 3. 𝅗𝅥 *La fonction Gamma*

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$ est convergente si et seulement si $a > 0$.

Pour tout $a > 0$, on pose $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$.

2) Déterminer une relation entre $\Gamma(a+1)$ en fonction de $\Gamma(a)$.

En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

3) On pose $f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{a-1}e^{-t}}{\Gamma(a)} & \text{si } t > 0. \end{cases}$

Montrer que f_a est une fonction de densité de probabilité.

4) Soit X une variable aléatoire de densité f_a. Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.

Exercice 4. ♩

On pose $F(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

Déterminer une densité f de la variable aléatoire X.

Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = 0$ par un calcul explicite puis par une astuce classique.

Exercice 5. ♩ *Loi exponentielle et quelques produits dérivés.*

On pose $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1) Calculer la densité, l'espérance et la variance de X.
2) Déterminer la loi de $T = X^2$.
3) On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ (N.B. il s'agit de la notation alternative de partie entière, car $E(X)$ serait ambiguë en probabilité).
Déterminer la loi de Y.
Vérifier que $U = Y + 1$ suit une loi géométrique. En déduire $E(Y)$.
4) On pose $Z = X - Y$.
Montrer que pour tout $a \in [0, 1[$, on a $(Z \leq a) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (n \leq X \leq n + a)$.
En déduire la fonction de répartition de Z.

Exercice 6. ♩
Soit $(X_i)_{i=1}^n$ une famille de variables aléatoires uniformes sur $[0, a]$ indépendantes.
On pose $U = \sup_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $V = \inf_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1) Déterminer la densité de U et $E(U)$.
2) Idem avec V. On calculera $E(V)$ de deux façons différentes (IPP puis Newton).

Exercice 7. ♩
La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $]-1, 1[$. Déterminer la loi de $Y = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1+X}{1-X} \right)$.

Exercice 8. ♩
On note X la variable aléatoire égale à la durée en minute d'une communication téléphonique de Calixte. On suppose que $Y = \ln X$ suit $\mathcal{N}(1, 2)$.
1) Exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle de la loi de $\mathcal{N}(0, 1)$.
2) En déduire une densité de X.

Exercice 9. 𝅗𝅥
Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6mn par heure. Quel est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient occupées en même temps soit au plus égale à $0,025$?

Exercice 10. ♩
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variable deux à deux indépendantes. On suppose que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} p \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

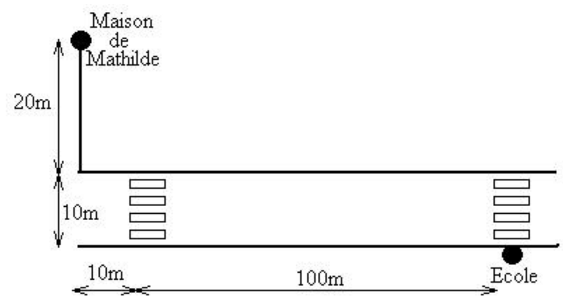
Exercice 11. 𝅗𝅥 *Inégalité de Kolmogorov*
Soit X une variable aléatoire réelle telle qu'il existe un nombre réel strictement positif β tel que $|X| \leq \beta$.
Montrer que pour tout réel $a \in [0, \beta]$, on a

$$p(|X| \geq a) \geq \frac{E(X^2) - a^2}{\beta^2}$$

(On distinguera le cas des lois discrètes et continues)

Exercice 12. *($\frac{1}{2}$-finales FFJM 2013)*

Lorsqu'elle se rend à l'école, Mathilde marche toujours à $4,5\text{km.h}^{-1}$. Mathilde a élaboré une stratégie qui lui permet de partir le plus tard possible de chez elle tout en n'arrivant jamais après 8h30 à l'école. Pour ceci, elle a remarqué que les feux à piétons des deux passages protégés de l'avenue où se trouve son école étaient verts pendant 15s, puis rouges pendant 45s. De plus, ils sont synchronisés et visibles depuis n'importe quel point de l'avenue. En revanche, l'horaire auquel ils démarrent le matin n'étant pas fixe, il n'est pas possible de savoir à l'avance l'heure à laquelle ils passeront au vert et Mathilde ne découvre l'état des feux qu'à l'instant où elle arrive à l'intersection de la rue de sa maison et de la rue de l'école.



Quelle est, en moyenne, l'heure à laquelle arrive Mathilde à l'école, sachant qu'une fois qu'elle est sortie de chez elle, elle essaye toujours d'arriver le plus tôt possible à l'école ? (On donnera une réponse arrondie à la seconde près).