

Exercice 1. ♪

1) Précisez les sous-espaces vectoriels ou les variétés affines de $\mathbb{R}^3$. Dans le cas des sous-espaces vectoriels, extraire un système générateur.

a) $A = \{(a, b, a + b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

b) $B = \{(a + 1, b - 1, a + b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

c) $C = \{(a^2, b^2, a^2 + b^2), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

d) $D = \{(x, y), x^2 + y^2 = 0\}$.

2) Idem dans $\mathbb{R}[X]$. a) $A = \{p \in \mathbb{R}[X], p(0) = 0\}$.

b) $B = \{p \in \mathbb{R}[X], p(0) = 1\}$.

c) $C = \{p \in \mathbb{R}[X], \deg p \geq 8\}$.

d) $D = \{p \in \mathbb{R}_2[X], p + p' + p'' = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.

Exercice 2. ♪

Soit $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ où $(x', y', z') = (y + z, x + y + z, x)$.
 $(x, y, z) \longmapsto (x', y', z')$

Montrer que f est linéaire. Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

Exercice 3. ♪

Déterminer une base de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $a_1 = (1, 0, -2, 3)$, $a_2 = (4, -1, 1, 4)$, $a_3 = (5, 2, 6, 3)$, $a_4 = (2, 1, 4, 0)$ et $a_5 = (-1, 2, 1, -1)$.

Exercice 4. ♪

On donne les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que $u_n = \ln n$, $v_n = \ln(n + 1)$ et $w_n = \ln \sqrt{n(n + 1)}$.

Soit F l'espace vectoriel engendré par ces trois suites. Donner une base de F .

Exercice 5. ♪

Soit $f: \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ tel que $q(X) = p(X + 1) - p(X)$.
 $p \longmapsto q$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ et en donner une base.

Exercice 6. ♪

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f \iff \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$.

Exercice 7. ♪

Soit $\varphi: \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ où q est le quotient de la division euclidienne de p par $(X - 1)$.
 $p \longmapsto q$

Montrer que φ est une application linéaire. Déterminer $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

