Feuille d'exercices $n°$10

Matrices

Exercice 1. ♪

1) On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, z, y+z) \end{array}$.

Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, 2y, 3x+5y) \end{array}$.

Ecrire la matrice de f de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ dans celle de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. ♪

Soit l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, x-y, y+z) \end{array}$.

1) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$. L'application f est-elle injective ?
3) Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4) Déterminer $\dim F$ et une base de $f(F)$.

Exercice 3. ♪

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Parmi les produits suivants, calculer ceux qui ont un sens : AB, BA, A^2, AC, CA, C^2, BC, CB et B^2.

Exercice 4. ♪

Effectuer les produits suivants :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

Exercice 5. ♪

Déterminer le rang de

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. ♩

La matrice suivante est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. ♩

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Calculer leur inverse quand c'est possible.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 8. 𝅗𝅥

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $AB = I$. Peut-on en déduire que la matrice A est inversible ? Calculer la matrice $M = BA$. La matrice M est-elle inversible ?

Exercice 9. ♩ *(Méthode de Waugh)*

Soit A une matrice nilpotente d'ordre p.

1) Montrer que

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}.$$

2) Appliquer cette méthode à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \sin\alpha \\ 1 & 0 & -\cos\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. 𝅗𝅥

On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer J^p pour $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

2) Ecrire A en fonction de I_4 et J. Puis calculer A^2, A^3 en fonction de I_4 et J.

3) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1} b^k (a-b)^{n-k} = \frac{1}{4}\left[(a+3b)^n - (a-b)^n\right].$$

En déduire A^n en fonction de I_4 et J pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Exprimer A^2 en fonction de A et I_4. En déduire que si $a \neq -3b$ et $a \neq b$, alors A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et I_4.

5) Calculer A^{-1} et montrer que la formule obtenue à la question 3 s'étend à $n = -1$.

Exercice 11. 𝅗𝅥

On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

Calculez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

Exercice 12. 𝅗𝅥

Une matrice réelle $A = (a_{ij})$ est dite **stochastique** si

$$\forall (i,j), \quad 0 \leq a_{ij} \leq 1 \qquad \text{et si} \qquad \forall j, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

1) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par le produit, mais pas par la somme.
2) Si A est stochastique et $B = A^2$, montrer que $\forall (i,j)$, on a

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_{ik} \leq b_{ij} \leq \max_{1 \leq k \leq n} a_{ik}$$