Feuille d'exercices $n°$11

Déterminants

EN2D2 Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♪

Soit dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (1,1,t)$, $e_2 = (1,t,1)$ et $e_3 = (t,1,1)$. Déterminer pour quelles valeurs de t la famille est libre.

Exercice 2. ♪

On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M = \mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Trouver les valeurs de α pour lesquelles φ est bijective.

Exercice 3. ♩

Calculer les déterminants suivants :

1) $\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}$.

2) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

3) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

4) $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$.

5) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.

6) $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$.

Exercice 4. 𝅗𝅥

Pareil, mais plus dur.

1) $\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$.

2) $\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & \dots & a_1 - b_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_n - b_1 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix}$, $(n \geq 3)$.

Exercice 5. 𝅗𝅥

Déterminer, suivant les valeurs de m, quand les matrices suivantes sont inversibles.

1) $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 & -1 \\ -1 & m & -1 & 0 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ -1 & 0 & -1 & m \end{pmatrix}$.

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. 𝅗𝅥

Montrer, sans le calculer, que le déterminant suivant est divisible par 13 :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Exercice 7. 𝅗𝅥 *Déterminant imbriqué.*

Montrer que $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_1 \\ \vdots & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\dots(\alpha_n-\alpha_{n-1}).$

Exercice 8. 𝅗𝅥

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}$ avec $p < n$. Calculer $\det(AB)$.

Exercice 9. ♩

1) On suppose que l'on a une matrice "blocs" de la forme

$$M = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

où A, B et C sont des matrices carrées 2×2 (et le 0 signifie la matrice 2×2 nulle).
Montrer que $\det M = \det A \times \det C$.
Peut-on étendre le raisonnement à des matrices blocs de n'importe quel ordre ?

2) Application : Calculer le déterminant suivant $\begin{vmatrix} a & b & p & q \\ c & d & r & s \\ s & r & d & c \\ q & p & b & a \end{vmatrix}$

Exercice 10. ♩ *Les matrices circulantes*

On pose la matrice circulante d'ordre n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Calculer son déterminant en faisant les bonnes opérations élémentaires.

Exercice 11. ♩ *Déterminants de Vandermonde.*

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Le déterminant de Vandermonde associé aux a_i est : $V(a_1, \dots, a_n) = \det\left(a_i^{j-1}\right)$.

1) Calculer et factoriser $V(a,b)$ et $V(a,b,c)$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $V(a_1, \dots, a_n, x) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$.

3) En déduire l'expression générale de $V(a_1, \dots, a_n)$.

Exercice 12. 𝅗𝅥

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que M^{-1} soit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 13. 𝅗𝅥

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Discuter du rang de la comatrice de M en fonction du rang de M.

2) Résoudre, pour $n \geq 3$, l'équation $\mathrm{Com}\, M = M$.

Exercice 14. ♪ *(Interversion de deux lignes)*

1) Décrire par une chaîne de trois opérations élémentaires sur deux lignes l'interversion de ces deux lignes.
2) En déduire ce qui se passe pour le déterminant d'une matrice quand on intervertit deux de ses lignes.

Exercice 15. ♩ *Le problème du berger.*
Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton, il existe une façon de séparer les 100 moutons restants en deux groupes de 50 moutons chacun tel que le poids total de chacun des groupes soit le même.
On peut en conclure que tous les moutons font le même poids.
1) Prolégomènes :
a) Montrer par récurrence que le déterminant de toute matrice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair.
b) En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.
2) Résolution du problème :
Pour i fixé entre 1 et 101, on appelle G_i et H_i les deux groupes constitués de 50 moutons chacun (le i^e n'étant pas pris) tels que la somme des poids des moutons du groupe G_i soit égal à la somme des poids des moutons du groupe H_i.
On pose $B = b_{ij}$ la matrice formée de la façon suivante : $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si le } j^e \text{ mouton se trouve dans le groupe } G_i \\ 2 \text{ si le } j^e \text{ mouton se trouve dans le groupe } H_i \end{cases}$
On note $P = p_i$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{101\times 1}$ telle que p_i soit le poids du i^e mouton.
Enfin, on note $m = \sum\limits_{i=1}^{101} p_i$ le poids total du troupeau.
a) Si $u = {}^t(1, \ldots, 1)$, calculer Bu.
b) Calculer BP.
c) Montrer que B est inversible.
d) En déduire P et conclure que $p_i = p_j$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq 101$.