Feuille d'exercices $n°$12

Diagonalisation

EN2D2 Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♩

1) Expliquer pourquoi si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors $\chi_A(X) = \det(A - XI)$.
2) Qu'en est-il si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 2. ♩

Soit $\mathcal{U}$ la famille formée des vecteurs $u_1 = {}^t(0,1,2,3,4)$, $u_2 = {}^t(1,2,3,4,5)$, $u_3 = {}^t(2,3,4,5,6)$, $u_4 = {}^t(3,4,5,6,7)$ et $u_5 = {}^t(4,5,6,7,8)$. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par cette famille.

1) Déterminer le rang de la famille $\mathcal{U}$ et donner une base de E formée d'éléments de $\mathcal{U}$.
2) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ défini par $\varphi(e_k) = u_k$ pour $k \in [\![1,5]\!]$ où le e_k sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

a) Déduire de la première question le rang de φ et une base de $\operatorname{Im}\varphi$.
b) Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$? Identifier $\operatorname{Ker}\varphi$ par résolution d'un système et en donner une base.
c) Exprimer u_3, u_4 et u_5 en fonction de u_1 et u_2. Montrer que l'on pouvait directement en déduire une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.
d) Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{0_{R^5}\}$. En déduire que $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ sont supplémentaires.
e) Soit $\mathcal{B}$ une base constituée de vecteurs d'une base de $\operatorname{Ker}\varphi$ et de vecteurs d'une base de $\operatorname{Im}\varphi$, déterminer la matrice de φ dans cette nouvelle base.

Exercice 3. ♩

Soient $u_1 = {}^t(1,-2,1)$, $u_2 = {}^t(-2,1,-1)$, $u_3 = {}^t(-1,-4,1)$ et $u_4 = {}^t(4,1,1)$.

1) Extraire de la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ une base du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ engendré par cette famille. La compléter pour former une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2) Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ qui associe à chaque vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ le vecteur $\varphi(e_i) = u_i$. Donner la matrice A de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$. Donner une base du noyau de φ.
3) On décide de changer de base dans l'espace d'arrivée en prenant la base $\mathcal{B}$ à la place de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Vérifier les résultats précédents en calculant QB où Q est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.
4) On décide maintenant de changer de base dans l'espace de départ. Soient $e'_3 = 3e_1 + 2e_2 - e_3$ et $e'_4 = 2e_1 + 3e_2 + e_4$. vérifier que la famille $\mathcal{B}'\{e_1, e_2, e'_3, e'_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice C de φ dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. Vérifier ce résultat en utilisant la matrice P de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4. ♩

Soit $\mathcal{U}$ la famille formée des vecteurs $u_1 = {}^t(1,0,2,1)$, $u_2 = {}^t(2,1,3,2)$, $u_3 = {}^t(1,1,1,1)$, $u_4 = {}^t(0,1,-1,-1)$ et $u_5 = {}^t(2,0,4,3)$. On note E le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\mathcal{U}$.

1) Extraire de la famille $\mathcal{U}$ une base de E.
2) On note $e'_1 = {}^t(1,0,0,0)$. Montrer que $\mathcal{V} = \{u_1, u_3, u_4, e'_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3) Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $\varphi(e_k) = u_k$ où les e_k pour k allant de 1 à 5 forment la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Donner la matrice A de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^4$. Identifier $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ par une base.
4) Donner la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et la base $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^4$. Vérifier ce résultat en utilisant la matrice de passage Q de la base canonique (e'_i) de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathcal{V}$.
5) Trouver une base $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^5$ telle que la matrice de φ dans les bases $\mathcal{W}$ et $\mathcal{V}$ soit la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier ce résultat en utilisant la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^5$ à la base $\mathcal{W}$.

Exercice 5. ♩

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

On donne $u = {}^t(1, 0, 1)$, $v = {}^t(2, 1, 2)$ et $w = {}^t(1, -1, 0)$.

1) Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la matrice de φ dans cette nouvelle base.

Exercice 6. 𝅗𝅥

1) Diagonaliser, si possible

$$\begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

2) Triangulariser les matrices précédentes quand la diagonalisation n'est pas possible.

3) Déterminer toutes les matrices M telles que $M^2 = A$.

Exercice 7. 𝅗𝅥

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2) Déterminer trois vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$ tels que $\varphi(\varepsilon_1) = -2\varepsilon_1$, $\varphi(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $\varphi(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

3) En déduire une matrice triangulaire semblable à A.

Exercice 8. 𝅗𝅥

Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $(A - \lambda I)$ non inversible.

2) On suppose λ valeur propre de A unique. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I$.

3) Si λ valeur propre de A et X vecteur propre associé, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a λ^k valeur propre de A^k et X vecteur propre associé à λ^k.

4) On suppose A inversible. Montrer que si λ est valeur propre associée à A et X vecteur propre associé à λ, alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre associée à A^{-1} et X vecteur propre associé à $\frac{1}{\lambda}$.

5) En déduire que si P est un polynôme annulateur de A, alors le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P.

Exercice 9. 𝅗𝅥

1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

a) Montrer qu'elles ont même polynôme caractéristique.
b) Sont-elles semblables ?

2) On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
b) Calculer $B^3 - 3B^2 + 3B - I$.
c) Est-elle inversible ? Si oui, calculer B^{-1}.
d) La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser. Si non, la triangulariser.

Exercice 10. ♩

On pose $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

1) Trouver a et b tels que $A^3(t) = aA(t) + bI$.

2) En déduire que $A(t)$ est semblable à $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 2-t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 11. 𝅗𝅥

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer J^2, K^2, JK et KJ.
En déduire que 0 et 4 sont valeurs propres de J et que 0 et 2 sont valeurs propres de K. Y a-t-il d'autres valeurs propres ?
2) Déterminer les sous-espaces vectoriels associés à ces valeurs propres.
3) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de J et K.
4) Soit $M_{ab} = aJ + bK$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les valeurs propres de M_{ab}. Calculer M_{ab}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. 𝅗𝅥

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Calculer A^2, A^3 et A^4.
Donner A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
Vérifier que $C^2 - 3C + 2I = 0$.
Calculer C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
Diagonaliser D.
Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. ♩

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$ avec $m \in \mathbb{R}^*$.

1) Montrer que $(A + I)(A - 2I) = 0$.
2) Posons $B = \frac{1}{3}(A + I)$ et $C = \frac{1}{3}(A - 2I)$. Calculer B^n et C^n pour $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $A^n = 2^n B^n + C^n$. Simplifier A^n.
3) Autre méthode : diagonaliser A puis calculer A^n.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) Par ce que $A - XI = -(XI - A)$. Il suffit de factoriser chacune des deux lignes pour obtenir le même déterminant car $(-1)^2 = 1$.

2) On obtient $\chi_A(X) = (-1)^3 \det(A - XI) = -\det(A - XI)$.

Exercice 2.

1) En effectuant les différences $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$, …on trouve à chaque fois le vecteur ${}^t(1,1,1,1,1)$. Donc $u_2 - u_1 = u_3 - u_2$, $u_3 - u_2 = u_4 - u_3$ et $u_4 - u_3 = u_5 - u_4$. Il ne reste que (u_1, u_2) comme famille génératrice.

2) a) On a $\operatorname{rg}\varphi = \dim \operatorname{Vect}(\mathcal{U}) = 2$.

b) Via le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 5 - 2 = 3$. On doit résoudre le système :

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t,u) \in \operatorname{Ker}\varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrrrl} & +y & +2z & +3t & +4u & = 0 \\ x & +2y & +3z & +4t & +5u & = 0 \\ 2x & +3y & +4z & +5t & +6u & = 0 \\ 3x & +4y & +5z & +6t & +7u & = 0 \\ 4x & +5y & +6z & +7t & +8u & = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrrrll} & +y & +2z & +3t & +4u & = 0 & L_1 \\ x & +y & +z & +t & +u & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ x & +y & +z & +t & +u & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ x & +y & +z & +t & +u & = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ x & +y & +z & +t & +u & = 0 & L_5 \leftarrow L_5 - L_4 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrrrl} & +y & +2z & +3t & +4u & = 0 \\ x & +y & +z & +t & +u & = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = -2z - 3t - 4u \\ x = z + 2t + 3u \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_4} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_5}
\end{aligned}
$$

c) $u_3 = 2u_2 - u_1$, $u_4 = 3u_2 - 2u_1$ et $u_5 = 4u_2 - 3u_1$. Donc $\varphi(e_3) = 2\varphi(e_2) - \varphi(e_1)$. Ainsi, $\varphi(e_3 - 2e_2 + e_1) = 0$ et $v_3 = e_3 - 2e_2 + e_1 \in \operatorname{Ker}\varphi$. Idem pour $v_4 = e_4 - 3e_2 + 2e_1$ et $v_5 = e_5 - 4e_2 + 3e_1$.

d) Soit $u \in \operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$, on a alors $u = \alpha u_1 + \beta u_2$ car $u \in \operatorname{Im}\varphi$. Si de plus $u \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $\varphi(u) = 0$.

$$
\begin{aligned}
\varphi(u) = \varphi(\alpha u_1 + \beta u_2) &= \alpha\varphi(0e_1 + 1e_2 + 2e_3 + 3e_4 + 4e_5) + \beta\varphi(1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 5e_5) \\
&= \beta\varphi(e_1) + (\alpha + 2\beta)\varphi(e_2) + (\alpha + 2\beta)\varphi(e_2) + (2\alpha + 3\beta)\varphi(e_3) + (3\alpha + 4\beta)\varphi(e_4) + (4\alpha + 5\beta)\varphi(e_5) \\
&= \beta u_1 + (\alpha + 2\beta)u_2 + (2\alpha + 3\beta)u_3 + (3\alpha + 4\beta)u_4 + (4\alpha + 5\beta)u_5 \\
&= \beta u_1 + (\alpha + 2\beta)u_2 + (2\alpha + 3\beta)(2u_2 - u_1) + (3\alpha + 4\beta)(3u_2 - 2u_1) + (4\alpha + 5\beta)(4u_2 - 3u_1) \\
&= (-20\alpha - 25\beta)u_1 + (30\alpha + 40\beta)u_2
\end{aligned}
$$

$$
\text{Soit à résoudre } \left\{\begin{array}{ll} 30\alpha + 40\beta & = 0 \\ 40\alpha + 55\beta & = 0 \\ 50\alpha + 70\beta & = 0 \\ 60\alpha + 85\beta & = 0 \\ 70\alpha + 100\beta & = 0 \end{array}\right. \text{, ce qui donne } \alpha = \beta = 0.
$$

e) On pose $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, v_3, v_4, v_5\}$ et dans cette base ; on a

$$
\begin{pmatrix} -20 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

car $\varphi(u_1) = \varphi(e_2 + 2e_3 + 3e_4 + 4e_5) = u_2 + 2u_3 + 3u_4 + 4u_5 = -20u_1 + 30u_2$.
Et $\varphi(u_2) = \varphi(e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 5e_5) = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4 + 5u_5 = -25u_1 + 40u_2$.

Exercice 3.

1) u_1, u_2. On la complète avec à peu près n'importe quoi : $v = {}^t(0,0,1)$ par exemple.

2) On a $u_3 = 2u_2 + 3u_1$ et $u_4 = -3u_2 - 2u_1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{Ker}\varphi = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où, en faisant le calcul, $QB = A$.

4) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a de plus $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = BP$.

Exercice 4.

1) $E = \operatorname{Vect}(u_1, u_3, u_4)$ car $u_2 = u_1 + u_3$ et $u_5 = u_1 + u_3 - u_4$.

2) On peut utiliser la recherche d'une combinaison linéaire non triviale, mais en fait, dans le cas de n vecteurs en dimension n, il est plus rapide faire un déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Donc les vecteurs sont indépendants.

3) On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

On a $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(\varphi(e_i)) = \operatorname{Vect}(u_i) = E$. Pour le noyau, on cherche des vecteurs, soit avec la résolution classique d'un système, mais on peut aussi voir que $u_2 = u_1 + u_3 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(e_2) - \varphi(e_1) - \varphi(e_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(e_2 - e_1 - e_3) = 0$. Donc $v_1 = {}^t(-1,1,1,0,0)$ est dans le noyau. En exploitant $u_5 = u_1 + u_3 - u_4$, on trouve que $v_2 = {}^t(1,0,1,-1,-1)$ est aussi dans le noyau. Or $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension 2 via le théorème du rang, donc $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$.

4) On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie qu'on a bien $QB = A$.

On peut aussi calculer $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et faire $B = Q^{-1}A$.

5) On pose $\mathcal{W} = (e_1, e_3, e_4, e_1 - e_2 + e_3, e_5 + e_4 - e_2)$. On vérifie que $C = BP$.

Exercice 5.

1) Il suffit de calculer le déterminant : $\det(A) = -1 \neq 0$. Donc il s'agit d'une base.

2) On peut calculer les images des vecteurs : $\varphi(u) = \varphi(e_1 + e_3) = \varphi(e_1) + \varphi(e_3) = u + w$ et ainsi de suite pour trouver que $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(\varphi) = A$.

Ou alors, on peut aussi utiliser la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},(u,v,w)} = A$. Donc $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(\varphi) = P^{-1}AP = A^{-1}AA = A$.

Exercice 6.

1) $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 1, 16\}$, $\mathrm{Spec}(B) = \{1-\sqrt{3}, 2, 1+\sqrt{3}\}$ et $\mathrm{Spec}(C) = \{2\}$.

2) La dernière n'est pas diagonalisable car si elle l'était, on aurait $E_2 = \mathbb{R}^3$ et donc, pour tout vecteur u, cela donnerait $C.u = 2u$. On voit que ce n'est pas le cas avec $u = (1, 0, 0)$ par exemple.

3) Déterminer celles qui marche dans la nouvelle base. i.e.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.

1) $\mathrm{Spec} = \{-2, 1\}$ avec 1 ayant pour multiplicité algébrique 2 et géométrique 1. La matrice n'est donc pas diagonalisable.

2) $\varepsilon_1 = (0, 0, 1)$ et $\varepsilon_2 = (1, -2, \frac{20}{3})$. De plus, en résolvant le système, on trouve $\varepsilon_3 = (1, -1, \frac{16}{9}$.

3) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8.

1) CN : Si λ est valeur propre, alors il existe un vecteur propre u tel que $Au = \lambda u$ donc $(A - \lambda I)u = 0$ i.e. $A - \lambda I$ possède un noyau non trivial et cette matrice n'est pas inversible.
CS : Si $A - \lambda I$ n'est pas inversible, cela veut dire qu'il existe un noyau non trivial et un u dans le noyau qui devient, par le même raisonnement que précédemment, un vecteur propre de A.

2) La condition suffisante est triviale.
Pour la condition nécessaire, Il existe une matrice de passage P telle que $\lambda I = P^{-1}AP$. D'où $A = P(\lambda I)P^{-1} = \lambda PIP^{-1} = \lambda I$.

3) Il suffit de composer : $A^k.u = A^{k-1}A.u = A^{k-1}.(\lambda u) = \lambda A^{k-1}.u$ et par récurrence finie, $A^k.u = \lambda^k u$.

4) On a $A.X = \lambda X$, donc $A^{-1}A.X = A^{-1}(\lambda X) \quad \Leftrightarrow \quad X = \lambda A^{-1}X$, donc $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre associée à A^{-1} et X vecteur propre associé à $\frac{1}{\lambda}$.

5) On pose $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a alors $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k A^k = 0$. Soient $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ et v_λ un vecteur propre associé à λ. Ainsi,

$$P(A)v_\lambda = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k v_\lambda = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k}_{P(\lambda)} v_\lambda = 0.$$

Or $v_\lambda \neq 0$ par définition, donc $P(\lambda) = 0$ et λ est racine de P.

Exercice 9.

1) a) On trouve en faisant $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ et $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$:

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} -2-X & -3 & 0 \\ -2-X & -5-X & -2-X \\ 0 & -6 & -2-X \end{vmatrix} = (-2-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -5-X & 1 \\ 0 & -6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (X+2)^2 \left[\begin{vmatrix} -5-X & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} \right] = \boxed{-(X+2)^3}\,. \end{aligned}$$

Idem pour l'autre.

b) Non car en calculant les sous-espaces propres, on se rend compte que la dimension du sous-espace propre associé à -2 est 2 pour A et 1 pour B

2) a) On trouve pour polynôme caractéristique $P_A(X) = (3-X)(X+3)^2$. Et les sous-espaces propres associés à 3 et -3 sont de dimension maximale : $v_3 = (1,-2,1)$, $v_{-3} = (1,0,-1)$ et $v'_{-3} = (0,1,2)$. Donc la matrice est diagonalisable et on trouve

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $B^3 - 3B^2 + 3B - I = 0$.

c) En utilisant la ruse de la factorisation du polynôme annulateur, on trouve

$$B^3 - 3B^2 + 3B - I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B\underbrace{(B^2 - 3B + 3I)}_{B^{-1}} = I.$$

d) Le calcul précédent montre que $(B-I)^3 = 0$. On a donc trouvé un polynôme annulateur qui est $(X-1)^3$. Ainsi, les valeurs propres de B sont contenues dans les racines de ce polynôme et le polynôme caractéristique de B est $-(X-1)^3$.

Mais le sous-espace propre associé est de dimension 1 engendré par $u = (1,0,-1)$. Donc elle n'est pas diagonalisable.

Pour la triangulariser, on a déjà un vecteur u. On cherche v et w tels que (u,v,w) forme une base et telle que la matrice B dans cette nouvelle base soit de la forme

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le premier vecteur v, cela revient à résoudre $Av = \alpha u + v$:

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x+y+z \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \alpha \\ x = -z \end{cases}$$

On choisit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On recommence pour $Aw = \beta u + \gamma v + w$:

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x+y+z \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ -\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \beta + \gamma \\ x + z = \gamma \end{cases}$$

On peut prendre $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ correspondant à $\beta = 0$ et $\gamma = 3$ (on essaie toujours d'avoir un minimum de termes non nuls). En fait, on se rend compte que n'importe quel vecteur fonctionne vu qu'il s'agit du dernier et qu'il n'y a pas le choix de la diagonale (le déterminant de la matrice étant le produit des valeurs propres).

D'où

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10.

1) On trouve $A^3(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2-t & t(2-t) \\ 0 & 2 & t-2 \\ t-2 & 2-t & 3t-4 \end{pmatrix}$ et en identifiant avec $aA(t)+bI = \begin{pmatrix} a+b & a & ta \\ 0 & a+b & -a \\ -a & a & -2a+b \end{pmatrix}$, on trouve

$$a = 2-t, \quad b = t.$$

2) La matrice $A(t)$ est semblable à $B(t)$ s'il existe une base $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ telle que $f(u) = v$, $f(v) = w$ et $f(w) = tu + (2-t)v = tu + (2-t)f(u) = [tId + (2-t)f](u) = f^3(u)$.

Donc $A(t)$ est semblable à $B(t)$ s'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $(1,0,0)$ convient.

Exercice 11.

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $K^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $JK = KJ = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$.

On a $J^2 = 4J$, donc J a pour polynôme annulateur $X^2 - 4X$. Les valeurs propres de J sont donc contenues dans les racines de ce polynôme i.e. $\mathrm{Spec}(J) \subset \{0;4\}$ Or 0 ne peut pas être valeur propre unique car on aurait $J = 0$. D'où l'égalité. Idem pour K.

2) On calcule le polynôme caractéristique de J (ou on la regarde dans les yeux avec ces quatre colonnes identiques...) et on trouve 0 valeur propre triple et 4 valeur propre simple. On trouve pour vecteurs propres associés à 0 les vecteurs $v_0 = (0,-1,1,0)$, $v'_0 = (0,-1,0,1)$ et $v''_0 = (1,-1,0,0)$. Pour 4, le vecteur $v_4 = (1,1,1,1)$ est vecteur propre.

En ce qui concerne K, les multiplicités algébriques des deux valeurs propres sont 2 et les sous-espaces propres sont aussi de dimension 2. On trouve une base de vecteurs propres associés à 0 avec $w_0 = (0,1,0,1)$ et $w'_0 = (1,0,1,0)$. D'autre part, pour la valeur propre 2, on trouve $w_2 = (0,1,0,-1)$ et $w'_2 = (-1,0,1,0)$.

3) On a $v_4 = w_0 + w'_0$ et $v'_0 = -w_2$. De plus, $2v_0 = w'_0 + w'_2 - (w_0 + w_2)$ et $2v''_0 = w'_0 - w'_2 - (w_0 + w_2)$. Donc on considère la base (v_0, v'_0, v_2, v'_2), et on cherche les images via K :

$$K.v_0 = K.\tfrac{1}{2}(w'_0 + w'_2 - w_0 - w_2) = \tfrac{1}{2}(\underbrace{K.w'_0 - K.w_0}_{0} + \underbrace{K.w'_2 - K.w_2}_{2(w'_2 - w_2)}) = w'_2 - w_2$$
$$K.v'_0 = K.(-w_2) = -2w_2 = 2.v'_0.$$

Exercice 12.

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^4 = 0$. Donc $A^n = 0$ si $n \geq 4$.

2) $B = I + 2J + 4J^2$ avec J la matrice nilpotente usuelle. Et $B^n = (I + 2J + 4J^2)^n$

3) On pose $C^n = \alpha_n C + \beta_n I$ avec les conditions initiales $\alpha_2 = 3$ et $\beta_2 = -2$. On a alors

$$C^{n+1} = CC^n = C(\alpha_n C + \beta_n I)$$

donc $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = -2\alpha_n$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

On pose $X_n = {}^t(\alpha_n, \beta_n)$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et on la diagonalise. On trouve $\text{Spec}(A) = \{1; 2\}$ et les vecteurs propres $v_2 = (-1, 1)$ et $v_1 = (1, -2)$. D'où la matrice de passage et son inverse :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $P^{-1}X_{n+1} = DP^{-1}X_n$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'où $P^{-1}X_n = D^{n-2}P^{-1}X_2$. Ainsi,

$$X_n = PD^{n-2}P^{-1}X_2 \quad \Leftrightarrow \quad X_n = \begin{pmatrix} -1 + 2^{n-1} & -1 + 2^{n-2} \\ 2 - 2^{n-1} & 2 - 2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2^n \\ 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

4) On a $\text{Spec}(D) = \{1, -2, 4\}$ avec les vecteurs propres associés $v_1 = (5, -1, 1)$, $v_{-2} = (1, \frac{3}{2}, -1)$ et $v_4 = (2, 0, 1)$. D'où les matrices de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

En posant $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, on a

$$D^n = PE^nP^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 - (-2)^{n+1} + 2 \times 4^n & -10 - (-2)^{n+1} + 2 \times 4^{n+1} & -10 - (-2)^{n+2} + 14 \times 4^n \\ -3 + 3 \times (-2)^n & 6 + 3 \times (-2)^n & 6 + 3 \times (-2)^{n+1} \\ 1 + (-2)^{n+1} + 4^n & -2 - 2 \times (-2)^n + 4^{n+1} & -2 + (-2)^{n+2} + 7 \times 4^n \end{pmatrix}$$

Exercice 13.

1) Y'a qu'à le faire.

2) On suppose $n > 0$ et on trouve $B^2 = B$, donc $B^n = B$. Voyons si nous avons la même chance avec C : Pas loin, $C^2 = -C$, donc $C^n = (-1)^{n+1}C$.
On remarque que $A = 2B + C$. Et comme d'après la première question, $BC = 0$, on a $A^n = (2B)^n + C^n = 2^nB + (-1)^{n+1}C$.

3) On trouve $\text{Spec}(A) = \{-1; 2\}$ et pour vecteurs propres associés à -1 : $v_{-1} = (-m, 1, 0)$ et $v'_{-1} = (-m^2, 0, 1)$. Quant à 2 : $v_2 = (m^2, m, 1)$. Soit la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} -m & -m^2 & m^2 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3m^2} \begin{pmatrix} -m & 2m^2 & -m^3 \\ -1 & -m & 2m^2 \\ 1 & m & m^2 \end{pmatrix}$$

On a alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times (-1)^n + 2^n & -m \times (-1)^n + m * 2^n & -m^2 \times (-1)^n + m^2 \times 2^n \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{m} + \dfrac{2^n}{m} & 2 \times (-1)^n + 2^n & -m \times (-1)^n + m \times 2^n \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{m^2} + \dfrac{2^n}{m^2} & \dfrac{(-1)^{n+1}}{m} + \dfrac{2^n}{m} & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$