Feuille d'exercices $n°$13

Formes quadratiques

EN2D2 Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♪

Discuter, suivant la valeur de a, le rang et la signature de la forme quadratique q_a définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q_a(X) = x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3.$$

Exercice 2. 𝅗𝅥

Soit φ une forme quadratique sur E, que l'on suppose définie. Montrer que φ est soit définie négative, soit définie positive.

Problème 1. 𝅗𝅥 *(Cachan 2002)*

Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(X) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$$

avec $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

1) Déterminer la matrice A associée à q dans la base canonique.

2) Construire une base orthonormée $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres de A. La matrice A est-elle inversible ?

3) Déterminer la matrice A' associée à q dans la base $\mathcal{B}$. En déduire l'expression de la forme réduite de q en fonction des nouvelles coordonnées (y_1, y_2, y_3) du vecteur X dans la base $\mathcal{B}$.

4) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{B}$. En déduire l'expression des y_i en fonction des x_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$, puis la forme réduite de $q(X)$ en fonction de (x_1, x_2, x_3). Quelle est la nature de cette forme réduite ?

Problème 2. 𝅗𝅥 *(Cachan 1999)*

Partie A. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2b(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

1) Déterminer la matrice A associée à q dans la base canonique. Quelles conditions doivent être vérifiées par les paramètres a et b pour que la matrice A soit non singulière ?

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + x_3).$$

Montrer que la matrice B associée à f, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est un cas particulier de la matrice A. Calculer B^{-1}.

Partie B. Supposons que la matrice A est telle que $a = 3$ et $b = 1$.

1) Trouver les valeurs propres de A.

2) Donner trois vecteurs propres de A orthogonaux non nuls de A.

Diagonaliser la matrice A. En déduire les coefficients α, β, γ et les nouvelles coordonnées x_1', x_2', x_3' tels que :

$$q(x_1', x_2', x_3') = \alpha x_1'^2 + \beta x_2'^2 + \gamma x_3'^2.$$

Exercice 3.

1) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ en considérant

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

2) Construire une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ avec ce produit scalaire.