Feuille d'exercices $n°$14

Fonctions de plusieurs variables

EN2D2 Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♪

Calculer la limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

1) $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$. **2)** $f(x,y)=\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$. **3)** $f(x,y)=x^2+y^2\sin\dfrac{1}{xy}$.

Exercice 2. ♪

Calculer les dérivées partielles secondes des expressions suivantes :

1) $f(x,y,z)=xz^3+y^2z+xy^4z$.
2) $f(x,y,z)=xy\ln z$.
3) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 3. ♩

Soit $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{array}$.

1) Montrer que $\Delta F=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. ($\Delta f$ est appelé le **laplacien** de f)

2) En déduire que $\Delta(\Delta F)=\dfrac{\partial^2(\Delta F)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(\Delta F)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2(\Delta F)}{\partial z^2}=0$

Exercice 4. ♪

Ecrire la différentielle totale des fonctions f :

1) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$.
2) $f(x,y)=x^y$.
3) $f(x,y)=\ln|\sin xy|$.
4) $f(x,y,z)=y^2\ln|x+z|$.

Exercice 5. ♩

1) Soient P, Q et R trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Quelles conditions doivent vérifier P, Q et R pour que la forme

$$\omega=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

soit exacte ?

2) Vérifier que les formes suivantes sont exactes et déterminer de quelles fonctions elles dérivent.

a) $(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$.
b) $(3x^2-6xy-6xz)dx+(3y^2-3x^2)dy+(3z^2-3x^2)dz$.

Exercice 6. 𝅗𝅥

Ecrire la formule de Taylor

1) à l'ordre 2 au voisinage de $(1,1)$ pour $f(x,y)=y^x$.
2) à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ pour $g(x,y)=e^x\sin y$.
3) à l'ordre 3 au voisinage de $(1,-1)$ pour $h(x,y)=e^{x+y}$.

Exercice 7. ♩

Représenter les ensembles de définition des fonctions définies ainsi :

1) $f(x,y)=\ln(2x+y-2)$.
2) $f(x,y)=\sqrt{1-xy}$.
3) $f(x,y)=\dfrac{\ln(y-x)}{x}$.
4) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Exercice 8. ♩

Montrer que $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9. ♩

Déterminer, quand elles existent, les limites de f en $(0, 0)$.

1) $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$.

2) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

3) $f(x, y) = \dfrac{|x + y|}{x^2 + y^2}$.

Exercice 10. ♩

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 11. ♩

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leurs différentielles.

1) $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$.

2) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

Exercice 12. ♩

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1) La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

2) Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

3) Est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?