**Feuille d'exercices $n°$15**

**Extrema**

EN2D2 Lycée Gustave Eiffel.

**Exercice 1.** 𝅗𝅥

Déterminer les extrema sans contrainte des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^n$.

**1)** $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 2y + 1$.
**2)** $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.
**3)** $f(x,y) = x^3 - y^3 + axy$.
**4)** $f(x,y) = e^{-2(2x^2+y^2-8x-4y)}$.
**5)** $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
**6)** $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + z^2 - 4z + 5$.
**7)** $f(x,y,z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$.
**8)** $f(x,y) = x^2 y \ln(1+y^2)$.
**9)** $f(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$.

**Exercice 2.** 𝅗𝅥

Déterminer les extrema avec contraintes des fonctions suivantes :

**1)** $f(x,y,z) = x^3 + yz^2$ sous $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+2y-2z+5=0 \end{cases}$.
**2)** $f(x,y,z) = 4\ln x + 2y + 8z$ sous $\begin{cases} 8-x-y-2z=0 \\ 1-\frac{1}{2}x - z = 0 \end{cases}$.
**3)** $f(x,y) = x^2 y$ sous $2x^2 + y^2 = 3$.
**4)** $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ sous $x + y \geq -3$.
**5)** $f(x,y) = 9 + x - 2y$ sous $(x,y) \in [1;2] \times [2;4]$.
**6)** $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous $\begin{cases} x^2+y^2+2z=6 \\ x-y-z=0 \end{cases}$.
**7)** $f(x,y,z) = x^2 y + 2x + y^2 - xz$ sous $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.
**8)** $f(x,y) = \ln(x-y)$ sous $x^2 + y^2 = 2$.

**Exercice 3.** 𝅗𝅥

Montrer que $e^{x-y} = 1 + x + y$ définie implicitement $y$ en fonction de $x$ au voisinage de $(0,0)$. On aura alors localement $y = \varphi(x)$.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.

**Exercice 4.** ♩

Etude des extrema de

$$f : \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x[(\ln x)^2 + y^2] \end{array}.$$

**Exercice 5.** ♩

Etude des extrema de $f(x,y,z) = x^3 z + y^3 - 3x^2 y - 2z^2$.

**Exercice 6.** ♩

On pose $g(x,y) = xe^y + ye^x$. Montrer qu'un point critique $(x_0, y_0)$ vérifie $x_0 y_0 = 1$ puis que $x_0 + e^{x_0 - \frac{1}{x_0}} = 0$ et en déduire $x_0 = -1$ en étudiant $x \longmapsto x + e^{x - \frac{1}{x}}$.

**Exercice 7.** ♩

Déterminer les extrema de $f : (x,y,z) \longmapsto xyz$ avec $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 1$.

**Solutions des exercices**

**Exercice 1.**

**1)** Point critique en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Les paramètres de Monge sont $(r, s, t) = (10, -2, 4)$. Donc $\Delta = 4(s^2 - rt) = 36 > 0$ et le point correspond à un minimum local.

**2)** Les points critiques sont $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. En $(0, 0)$, on a $\Delta = 0$ et $f(h, h) \geq 0$ alors que $f(h, \frac{h}{2}) \leq 0$, donc il s'agit d'un point col.

Pour les deux derniers points, on a $\Delta = 384 > 0$, ce qui donne un minimum local.

**3)** Points critiques en $(0, 0)$ et $(\frac{a}{3}, \frac{-a}{3})$. Les paramètres de Monge sont respectivement $(r, s, t) = (0, a, 0)$ et $(2a, a, 2a)$. Donc $\Delta = 4(s^2 - rt) = -a^2$ pour le premier et $\Delta = 3a^2$ pour le second...

**4)** Point critique en $(2, 2)$. Les paramètres de Monge sont $(r, s, t) = (, , )$. Donc $\Delta = 4(s^2 - rt) = 32e^{48}$ et $r < 0$ donc il s'agit d'un maximum local.

**5)** Points critiques en $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Les paramètres de Monge sont respectivement $(r, s, t) = (2, 0, 2)$ et $(r, s, t) = (-4e^{-1}, 0, -4e^{-1})$ pour les deux derniers. Donc $rt - s = 4$ pour le premier (minimum car $r > 0$) et $rt - s = 16e^{-2}$ pour les deux autres (maximum car $r < 0$).

**6)** Point critique en $(-1, -1, 2)$. La matrice hessienne est $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Son spectre vaut $\text{Spec}(M) = \{2; 3 + \sqrt{5}; 3 - \sqrt{5}\}$. La signature de la forme quadratique associée est $\text{sgn}(Q_M) = (3, 0)$. Donc il s'agit d'un minimum.

**7)** Points critiques en $(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, $(\pm\sqrt{2}, 2, 2)$. La matrice Hessienne est

$$\begin{pmatrix} 4(3x^2 - y) & -4x & -2 \\ -4x & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

• Pour $(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, on trouve la forme quadratique associée $\frac{-8}{3}(x + \frac{3}{4}z)^2 + 4y^2 + \frac{11}{2}z^2$ qui est de signature $(2, 1)$. Donc il s'agit d'un point col.

• Pour $(\pm\sqrt{2}, 2, 2)$, la forme quadratique est de signature $(3, 0)$ à chaque fois, ce qui correspond à deux minima.

**8)** Les points critiques sont en nombre infini et correspondent aux deux axes $(x = 0)$ et $(y = 0)$.

• Pour les points de l'axe des ordonnées, les paramètres de Monge donnent $(2y\ln(1+y^2), 0, 0)$, la forme quadratique est de signature $(1, 0)$, elle est donc semi-définie positive et on ne peut conclure directement. Or $f(0, y) = 0$ et $f(x, y) - f(0, y) = x^2 y \ln(1 + y^2)$ est toujours du signe de $y$. Ainsi, si $y > 0$, il s'agit d'un minimum et si $y < 0$, d'un maximum. En revanche, si $y = 0$, on a un point col car le signe dépend de celui de $y$.

• Pour les points de l'axe des abscisses, les paramètres de Monge sont tous nuls. On décide de faire un développement de Taylor à l'ordre 3 :

$$f(x, y) = \underbrace{f(x, 0)}_{=0} + \underbrace{< \text{grad}(f), (x, y) >}_{=0} + \underbrace{(x, y)\,\text{Hess}(f)^t(x, y)}_{=0}$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, 0)x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, 0)x^2 y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, 0)xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, 0)y^3\right) + ||(x, y)||^3 \varepsilon(||(x, y)||).$$

Or toutes les dérivées partielles secondes sont nulles en $(x, 0)$, à part $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, 0) = 6x^2$. Ainsi, localement en $(x, 0)$, l'expression de $f(x, y)$ est

$$f(x, y) = 6x^2 y^3 + o(||(x, y)||^3).$$

qui n'est pas de signe constant. Il ne s'agit donc pas d'un extremum quelle que soit la valeur de $x$.

**9)** Un seul point critique en $(-1, 0, 0)$. On calcule alors la Hessienne ce qui donne

$$\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4e^{-1} \end{pmatrix}$$

Donc la forme quadratique est définie positive et il s'agit d'un minimum.

**Exercice 2.**

**1)** On a $f(1, y, y+3) = y^3 + 6y^2 + 9y + 1$. Et comme $f'(y) = 3(y+1)(y+3)$, on trouve un minimum en $(1, -1, 2)$ et un maximum en $(1, -3, 0)$.

**4)** Minimum $\frac{-3}{4}$ en $(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2}$.

**5)** à l'intérieur, c'est vide. Au bord, un max en $(2, 2)$ qui vaut 7 et un min en $(1; 4)$ qui vaut 2.

**8)** lagrange au point critique $(1; -1)$. La matrice hessienne donne $\mathrm{Hess}L = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$.

$\mathrm{grad}\, g(1; -1) = (2; -2)$ donc $h_1 = h_2$. et $Q_a(h) = (h, h)$ mais $\mathrm{Hess}(h, h) = -h^2 < 0$ donc un maximum.

**Exercice 3.**

Il faut penser à un DL d'ordre 2 :

$$f(x, y) = f(0, 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y).\mathrm{Hess}_f(0, 0). \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + ||(x, y)||^2 \varepsilon(||(x, y)||)$$

ce qui donne

$$e^{x-y} = 1 + x - y + \frac{1}{2}(x - y)^2 + ||(x, y)||^2 \varepsilon(||(x, y)||).$$

Comme $y = \varphi(x)$, on a $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0$.

De plus, $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{x-y} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x - \varphi(x)}{x} = 1 - \lim_{x \to 0} \dfrac{\varphi(x)}{x}$

**Exercice 4.**

Deux points critiques : $(1, 0)$ avec deux val pp positives donc minimum local et même global. Et $(e^{-2}, 0)$ point col.

**Exercice 5.**

Points critiques : $(0, 0, 0)$ vp 0 et $-2$. or $f(0, h, 0) = h^3$ de signe variable, donc un point col.

$(-2, -2, -2)$ vp diff avec Taylor : $f(-2 + H) - f(-2) = 18(h_1 + \frac{h_2+h_3}{2})^2 - 8(h_2 + \frac{h_3}{4})^2 - \frac{7}{2}h_3^2$ indef point col.

Idem avec $(2, 2, 2)$.

**Exercice 7.**

lagrangien : point critique $(0, 0, \varepsilon), (0, \varepsilon\sqrt{3}), (2\varepsilon, 0, 0)$ avec $\lambda = 0$ implique col.

Si $\lambda \neq 0$ alors $xyz \neq 0$ et $(\frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_3)$ soit 6+8=14 points critiques.

$f(a + H) - f(a) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_1\frac{h_1}{2} + \varepsilon_2\frac{h_2}{\sqrt{3}} + \varepsilon_3 h_3)^2 + ||H||^2\varepsilon(H)$. donc max $\frac{2}{3}$ si $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$ et minimum $\frac{-2}{3}$ si $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$.