

Feuille d'exercices n°16

Convexité

EN2D2

Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♣

Montrer le lemme des trois pentes :

Si f est une fonction convexe de I un intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors,

$$\forall x < y < z \text{ dans } I, \text{ on a } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Exercice 2. ♣

Soit f une fonction convexe et majorée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que f est constante.

Exercice 3. ♣

Montrer que $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur \mathbb{R} .

En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $1 + \sqrt{ab} \leq \sqrt{1+a}\sqrt{1+b}$

Exercice 4. ♣

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave.

En déduire que $\forall (a, b) \in]1, +\infty[^2$, on a

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}.$$

