$\boxed{\textbf{Feuille d'exercices } n°\mathbf{17}}$

Estimateurs

EN2D2 Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♩

Les éléments d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de probabilité dont la densité est

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{\theta^4} & \text{si } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une suite de n expériences indépendantes a donné les valeurs $x_1, \ldots, x_n$. Proposer un estimateur du paramètre θ lié à la moyenne $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ de l'échantillon.

Exercice 2. ♩

Soient des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètre p.

On dit qu'une statistique T est exhaustive pour le paramètre p si

$$p_{T(\underline{X})=y}(\underline{X} = (x_1, \ldots, x_n))$$

est indépendant de p.

Autrement dit, si θ est le paramètre de X à estimer par T, il faut que $p_{(T=s)}(X = n)$ soit indépendant de θ.

1) Montrer que $T = \sum\limits_{k=1}^{n} X_i$ est une statistique exhaustive pour le paramètre p.

2) Pour $n = 3$, la statistique $\tilde{T} = e^{X_1+X_2+X_3}$ est-elle aussi exhaustive ? Idem avec $S = X_1 + X_2 + X_3$.

3) Soient les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ identiques et indépendantes qui suivent une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $T = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ est une statistique exhaustive pour le paramètre λ.

Exercice 3. ♩

Soient les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ qui suivent un loi de Bernoulli de paramètre p.

On considère les estimateurs du paramètre p suivants :

$$\hat{p_1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - 1}{n}, \qquad \hat{p_2} = \frac{1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} X_{2i}, \qquad \hat{p_3} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i.$$

Sont-ils biaisés, convergents, exhaustifs ?

Exercice 4. ♩

Soient X_1 et X_2 deux variables identiques et indépendantes d'espérance μ et de variance σ^2. Lequel des deux estimateurs de μ conseilleriez-vous ?

$$M_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \qquad\qquad M_2 = \frac{aX_1 + bX_2}{a + b}.$$

où a et b sont réels.