Mercredi 30 septembre 2014 (1h)

Devoir Surveillé $n°1$

INP-S3-2A INP - Bordeaux

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs. On fera particulièrement attention à la rédaction.

Exercice 1.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans les questions suivantes, on fera bien attention à justifier les résultats obtenus. En effet, "sans calcul" ne signifie pas "sans mot".

1) Déterminer le spectre de A sans calcul.

2) Toujours sans calcul, la matrice A est-elle diagonalisable ?

3) Allez, encore une sans calcul : Est-elle inversible ?

4) Et pour finir, une avec calcul : Déterminer une base dans laquelle la matrice est diagonalisable, ainsi que la matrice de passage P, son inverse P^{-1}, et vérifier que l'on obtient bien une matrice diagonale.

Exercice 2.

Dans cet exercice, on ne calculera pas les sous-espaces propres !

Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de B.

2) Justifier que B n'est pas diagonalisable.

3) Calculer les images des vecteurs $u = {}^t(1, 0, -1)$ et $v = {}^t(2, 1, -1)$ par l'endomorphisme φ associé à B.

4) En déduire une base dans laquelle la matrice B' associée à φ est triangulaire. Donner la matrice de passage et B'.

Exercice 3.

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $C^3 - 4C^2 + 5C$.

2) En déduire le polynôme caractéristique de C et $\mathrm{Spec}(C)$.

3) Déterminer un polynôme P tel que le simple calcul de $P(C)$ permette de dire si C est diagonalisable. Effectuer alors le calcul et conclure.

Correction Devoir Surveillé 1

Exercice 1.

1) La matrice étant triangulaire, les valeurs propres sont sur la diagonale. Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2, 4\}$.

2) La dimension de l'espace étant 3 et comme l'on a trois valeurs propres distinctes, chacun des sous-espaces propres est de dimension 1 et la matrice est diagonalisable.

3) La matrice est inversible car $0 \notin \mathrm{Spec}(A)$.

4) Pour les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 4 et 2, pas besoin de faire le calcul des vecteurs propres car on lit sur la matrice que $A.e_1 = 4e_1$ et $A.e_2 = 2e_2$.

Pour le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 : On cherche ${}^t(x, y, z)$ tel que $(A - I){}^t(x, y, z) = {}^t(0, 0, 0)$, ce qui donne $x = z$ et $y = 0$. On choisit alors le vecteur $v_1 = {}^t(1, 0, 1)$.

On a bien (e_1, e_2, v_1) qui forme une base comme le montre le déterminant de la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule l'inverse de P et on trouve rapidement $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Le calcul de $P^{-1}AP$ donne $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

1) On trouve $\chi_B(X) = (X + 2)^3$.

2) Si B était diagonalisable, comme elle n'a qu'une seule valeur propre, elle serait déjà diagonale, ce qui n'est pas le cas. De plus, on aurait $B.u = -2u$ pour tout vecteur u. Or on voit bien que $B.e_1 \neq -2e_1$ par exemple.

3) On obtient $B.u = -2u$ et $B.v = -2v$.

4) Comme les deux vecteurs précédents ne sont pas colinéaires, ils forment une base du sous-espace propre associé à -2 car il est au plus de dimension 2 d'après la question 2.

Afin de triangulariser, il nous suffit de prendre un troisième vecteur qui ne soit pas lié avec (u, v). On prend $w = {}^t(1, 2, 0)$ pour changer. On a alors $A.w = 2u + v - 2w$. Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où la matrice diagonale associée dans la nouvelle base de vecteurs propres : $B' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

1) On trouve

$$C^2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 12 & -5 & 6 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 15 & -7 & 7 \\ 28 & -13 & 14 \\ 14 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne $C^3 - 4C^2 + 5C = 2I$

2) On en déduit que le polynôme minimal est un diviseur de ce polynôme $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$. Donc $\mu_C(X)$ est soit $P(X)$, soit $(X-1)(X-2)$, soit $(X-1)^2$, soit $(X-1)$, soit $(X-2)$. Les deux derniers ne sont pas possibles car C n'est pas diagonale. Et comme $(X - 1)^3$ ne peut être

polynôme minimal, on connaît déjà les deux facteurs $(X-1)$ et $(X-2$ du polynôme caractéristique qui sont les mêmes que ceux du polynôme minimal. Il reste que $\chi_C(X) = (X-1)^2(X-2)$.

D'où $\mathrm{Spec}(C) = \{1, 2\}$.

3) En reprenant ce qui vient d'être fait, $P(X) = (X-1)(X-2)$ suffit pour vérifier que le polynôme minimal n'est pas P. En effet, $P(C) \neq (0)$. Donc C n'est pas diagonalisable car son polynôme minimal est bien scindé, mais pas à racines simples.