Mercredi 22 octobre 2014 (1h)

Devoir Surveillé $n°$2

INP-S3-2A — INP - Bordeaux

Les documents ne sont pas autorisés. On fera particulièrement attention à la rédaction.

Exercice 1.

La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

On pose A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1) a) Après avoir déterminé le polynôme caractéristique de A, calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

b) En déduire si la matrice est diagonalisable ou pas. Dans le premier cas, la diagonaliser, dans le second, la mettre sous forme d'une matrice de Jordan en déterminant une matrice de changement de base notée P. Exprimer A' la matrice de A dans cette nouvelle base.

c) Déterminer l'inverse de la matrice P.

d) Déterminer le polynôme minimal de A.

e) Déterminer les projecteurs spectraux de A. Vérifier que leur somme donne bien le résultat escompté.

2) On pose le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n + 5w_n \end{cases} \qquad \text{avec } u_0 = 0,\ v_0 = -1 \text{ et } w_0 = 1$$

et la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les puissances $n^{\text{ième}}$ de B pour $n \in \mathbb{N}$.

b) En vous servant de la question 1, montrer que le système précédent se traduit par un problème matriciel impliquant B via un changement de base adéquate.

c) En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 3.

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)$

1) En considérant des vecteurs de la forme $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec x et y deux vecteurs de dimension n, montrer que λ est une valeur propre de B si et seulement si λ^2 est une valeur propre de A.

2) Montrer que si $\mu = \lambda^2$ avec $\lambda \in \mathrm{Spec}(B)$, alors $\dim(\mathrm{Ker}(B - \lambda I_{2n})) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \mu I_n))$.

3) En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible. *(On pourra utiliser le fait qu'un complexe a, en général, deux racines carrées).*

Correction Devoir Surveillé 2

Exercice 1.

0 est valeur propre quadruple, et comme la matrice n'est pas nulle, elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.

1) a) On trouve $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$. La recherche des vecteurs propres donne $v_1 = {}^t(2,1,0)$ et $v_2 = {}^t(-3,-3,1)$.

b) Elle n'est pas diagonalisable car le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension $\dim V_2 = 1$ alors que la multiplicité de 2 dans le polynôme caractéristique est 2. Pour trouver une matrice de Jordan, il nous faut trouver un vecteur w_2 tel que $(A-2I)w_2 = v_2$, soit à résoudre

$$\left\{\begin{aligned} -x-3z &= -3 \\ x-3y-6z &= -3 \\ -x+2y+3z &= 1 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} x &= -3z+3 \\ y &= -3z+2 \end{aligned}\right.$$

On peut prendre par exemple $w_2 = {}^t(3,2,0)$. On trouve donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

d) On a trouvé $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$. Comme le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont les mêmes facteurs irréductibles, il suffit de tester si $(X-1)(X-2)$ est polynôme annulateur. Or

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ 3 & -6 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc le polynôme minimal est $\boxed{\mu_A(X) = \chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2}$.

Nota Bene : Une autre façon de voir est de dire que la matrice n'est pas diagonalisable, donc le polynôme minimal n'est pas scindé à racine simple.

e) On fait la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{\mu_A(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{3-X}{(X-2)^2}.$$

Donc

$$\pi_1 = (Q_1U_1)(\varphi) = ((X-2)^2 \times 1)(\varphi) = (\varphi - 2\,\mathrm{Id})^2$$
et
$$\pi_2 = (Q_2U_2)(\varphi) = ((X-1)(3-X))(\varphi) = (\varphi - \mathrm{Id})(3\,\mathrm{Id} - \varphi).$$

Ce qui donne en termes matriciels

$$\mathrm{Mat}(\pi_1) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}(\pi_2) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a bien $\pi_1 + \pi_2 = (\varphi - 2\,\mathrm{Id})^2 + (\varphi - \mathrm{Id})(3\,\mathrm{Id} - \varphi) = \mathrm{Id}$.

2) a) On écrit $B = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est nilpotente d'ordre 2 et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. De plus, les deux matrices commutent et on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$B^n = (C+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k C^{n-k} = C^n + nC^{n-1}N + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k}_{=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

b) On utilise l'étude précédente et on pose $X_n = {}^t(u_n, v_n, w_n)$. On a alors la traduction du système :

$$X_n = AX_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad X_n = PBP^{-1}X_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}X_n = BP^{-1}X_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad Y_n = BY_{n-1}.$$

en posant $Y_n = P^{-1}X_n$.

c) On a donc

$$X_n = A^n X_0 = PB^nP^{-1}X_0.$$

ce qui donne

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} -3n2^{n-1} \\ -2^{n-1}(3n+2) \\ 2^{n-1}(n+2) \end{pmatrix}}.$$

Exercice 3.

1) Si on suppose que X est un vecteur propre de B associé à λ, alors

$$BX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ay = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ay = \lambda^2 y \\ x = \lambda y \end{cases}$$

ce qui est bien ce qu'il fallait démontrer.

2) L'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(A - \mu I_n) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(B - \lambda I_{2n}) \\ y & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

est une bijection. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(B - \lambda I_{2n})) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \mu I_n))$

3) Comme les sous-espaces propres de A sont supplémentaires, $\sum_{\mu \in \mathrm{Spec}(A)} \dim(\mathrm{Ker}(A - \mu I_n) = n$. A chaque valeur propre $\mu \neq 0$ de A correspond λ_1 et λ_2 deux valeurs propres de B. De plus $\dim(\mathrm{Ker}(B - \lambda_1 I_{2n})) = \dim(\mathrm{Ker}(B - \lambda_2 I_{2n})) = 2$. Donc

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(B)} \dim(\mathrm{Ker}(B - \lambda I_{2n})) = 2n$$

et B est diagonalisable.

Si $\mu = 0 \in \mathrm{Spec}(A)$, alors il n'existe qu'une seule racine carrée $\lambda = 0$ et

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(B)} \dim(\mathrm{Ker}(B - \lambda I_{2n})) = 2n - 1 < 2n$$

donc B n'est pas diagonalisable.