

Sujets Math en Jeans Eiffel 2017-2018

Sujet 1: Jour de l'an

Pour la soirée du jour de l'an, n convives sont installés autour d'une table ronde. A minuit précises, ils lèvent chacun leur coupe (de champomy bien sûr) pour trinquer avec les autres. Ils entrechoquent leur verre seulement 2 à 2, à un rythme régulier de 3 secondes, sans changer de place, et bien sûr sans croiser (ça porte malheur!).

- 1) Combien y-aura-t-il de verres entrechoqués au total?
- 2) A quelle heure précise auront-ils fini au mieux?

Sujet 2: Qui est-ce ?

Jean-Claude, qui est un grand amateur de jeux de société, souhaiterait développer la meilleure stratégie possible pour maximiser ses chances de gagner contre son petit frère Didier au jeu *Qui est-ce ?*. Il est possible de modéliser le jeu de la façon suivante (pourquoi ?) :

- Chaque joueur possède au départ un ensemble de n cartes numérotées de 1 à n (noté E_0^1 pour le joueur 1 et E_0^2 pour le joueur 2) et une carte numérotée entre 1 et n , tirée au hasard et inconnue de l'autre joueur.
- Les deux joueurs jouent à tour de rôle, le but étant de trouver le premier le numéro de la carte inconnue de l'autre joueur. On peut supposer que c'est le joueur 1 qui commence et le joueur 2 qui joue après.
- au tour n , si aucun joueur n'a gagné au tour $n - 1$, le joueur 1 coupe l'ensemble E_{n-1}^1 en deux sous-ensembles non vides. Le joueur 2 indique alors au joueur 1 dans quel sous-ensemble se trouve sa carte secrète : ce sous-ensemble est noté E_n^1 . S'il reste une seule carte dans E_n^1 , le joueur 1 a gagné. Sinon, c'est au joueur 2 de jouer selon les mêmes règles.

Dans un premier temps Didier utilise toujours la même stratégie : à chaque tour il coupe E_n en deux sous-ensembles de même taille. Proposez à Jean-Claude la meilleure stratégie possible. Que pensez-vous de la stratégie de Didier ? On suppose maintenant que chaque joueur utilise une stratégie optimale, comment peut-on déterminer cette stratégie ?

Sujet 3: Des fonctions "équilibrées" sur un réseau.

Appelons $\mathbb{Z}^2$ l'ensemble des points du plan dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs. Chaque point a 4 voisins (1 à gauche, 1 à droite, 1 au dessus et 1 au dessous).

1) Est-il possible de mettre au dessus de chaque point de ce réseau $\mathbb{Z}^2$ une valeur entière (positive), de telle sorte que cette valeur soit égale à la moyenne des valeurs sur ses 4 voisins. Bien sûr mettre partout la même valeur est possible. La question est donc de savoir s'il existe d'autres possibilités.

2) Maintenant, on autorise à mettre des valeurs réelles au dessus de chaque point de $\mathbb{Z}^2$. Est-il possible de mettre des valeurs réelles au dessus de chaque point qui restent bornées de telle sorte que la propriété précédente soit encore satisfaite?

3) Qu'en est-il sur l'arbre binaire (arbre où chaque sommet a 2 descendants)?

Sujet 4: "La boum"

1) A une soirée, on a n filles et autant de garçons, combien existe-t-il de pistes de danses différentes. (On considère que tout le monde danse et que tous les couples sont formés d'un garçon et d'une fille).

2) Maintenant on a toujours n filles mais $p \geq n$ garçons. Ce sont les filles qui invitent. Même question: combien existe-t-il de pistes de danses différentes? (Toutes les filles dansent et chaque fille danse avec un seul garçon.)

3) On a toujours n filles mais $p \geq n$ garçons. A la fin de la soirée, chaque garçon offre une fleur avec un petit mot à une fille. Combien y-a-t-il de possibilités où chaque fille a reçu au moins une fleur?