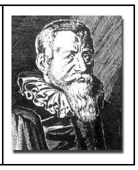
20

ELÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

Novembre-Décembre 2008
Bimestriel calorifuge
Ludolf Van Ceulen→



« *Connaître 40 décimales serait largement suffisant pour calculer la circonférence de la Voie Lactée avec une erreur inférieure à celle d'un proton.* » Anonyme.

Edito : Il est l'un des nombres les plus connus au monde après 0 et 1 et nous n'en avions pas encore parlé. Voilà qui est réparé. On s'intéresse ici à l'histoire de π, ses décimales ou encore ses étranges secrets. Vous aurez droit aussi à de très belles formules de mathématiques qui vous donneront, j'en suis sûr, l'envie de bien progresser pour réussir un jour à les comprendre et même à les transcender !

Vous trouverez, comme à chaque fois, une nouvelle ruse ainsi que la solution de la ruse précédente.

Bonne lecture,
Prof (pas Atchoum !)

Pourquoi Pi ?:

Le nom du nombre π vient de *perimetros* en grec. On pense que cette appellation vient d'Angleterre vers 1700.

Bien avant, il semble que les babyloniens connaissaient déjà π et en donnaient la valeur approchée :

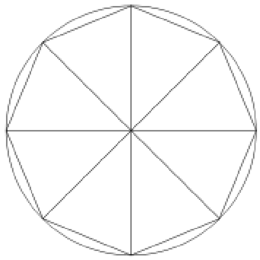
$$\pi \simeq 3+\frac{1}{8}=3{,}125$$

Quatre siècles plus tard, Ahmès (1650 av. J.C) donne deux décimales de π dans le plus vieil écrit mathématique (si l'on exclut les fresques), le papyrus de Rhind. Il écrit : « *Pour calculer l'aire d'un disque de diamètre d, il suffit de calculer l'aire du carré dont le côté est égal au diamètre diminué de son neuvième.* » En fait, c'est un exercice de seconde que de voir que π est approché par (16/9)^2, soit 3,16 (dommage !).

Mais ça reste mieux que la Bible ou les chinois qui donnent un peu plus tard la valeur approchée de …..3. En effet, on trouve dans la Bible : "*Il fit la Mer en métal fondu, de dix coudées de bord à bord, à pourtour circulaire de 5 coudées de hauteur ; un fil de 30 coudées en mesurait le tour.*" Je vous laisse démontrer qu'on trouve bien 5.

Plus tard, Archimède eut l'idée d'enserrer un cercle entre deux polygones réguliers et de calculer leurs aires. Il obtient ainsi un encadrement de l'aire du disque et donc, de π :

$$3+\frac{2}{15}<\pi<3+\frac{2}{14}$$



Plus tard (1429), Al Kashi en donne 14 décimales.

Viète (1593) en trouve 9 en utilisant la technique d'Archimède sur des polygones à 393 216 côtés !.... Avec la même tactique, Ludolph Van Ceulen (1609) passe la moitié de sa vie à trouver 34 qu'il fit graver sur sa tombe (en Allemagne, on l'appelle d'ailleurs souvent le nombre de Ludolph.). Il était donc urgent de trouver une technique plus performante. C'est Machin (1706) qui trouve 100 décimales en améliorant la méthode de James Gregory (1670) (arctan est la fonction réciproque de la tangente) :

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

Rutherford (1853) en donne 440 et Shanks (1874) en donne 707 (chiffres de la coupole du palais de la découverte faux à partir de la 528^e (il a été rectifié depuis). Le record tient 71 ans.

En 1949, les machines arrivent et le mur des mille est crevé ; 10 000 en 1958 ; 100 000 en 1961, 1 000 000 en 73, 10 millions en 83, 100 millions en 87 et le milliard en 89. Percival (17 ans) en 1998 trouve le 5000 milliardième chiffre de π : il s'agit de 0.

Si l'intérêt de trouver de nouvelles décimales est très discutable, il n'empêche que la recherche a, comme souvent, progressé dans des branches parallèles grâce à ces quêtes ludiques au départ.

Attention ! Pi est partout !

Laissez-moi vous écrire trois petites anecdotes :

- Tracez un cercle inscrit dans un carré sur une feuille. Punaisez ladite feuille au mur. Eloignez-vous suffisamment. Munissez-vous d'une fléchette et jetez-là au hasard sur la cible un grand nombre de fois. Comptez le nombre de fois où vous avez touché le disque. Multipliez par quatre et divisez par le nombre de fois où vous avez touché le carré. Miracle ! Vous trouvez π ! (En fait, il s'agit de la méthode dite de Monté Carlo. Calculez le rapport des aires du disque et du carré et vous comprendrez).
- Si vous faîtes le rapport de la longueur d'un fleuve (de plaine) de sa source à son embouchure par la même longueur mais prise à vol d'oiseau, vous trouvez une valeur approchée de π. Et plus le fleuve est long et plus vous avez une valeur précise. Ce postulat est dû à Einstein et a été démontré par Hans-Hendrick Stolum. Il tient au fait que la formation d'un méandre tend à s'amplifier du fait du courant créé sur la rive externe, mais celle-ci est limitée dans la mesure où des méandres trop prononcés forceraient le fleuve à prendre des raccourcis. L'équilibre se trouve dans un rapport de π.
- Pour finir, une énigme : la dipneuse, un poisson d'Afrique a une séquence génétique sur son chromosome 3 qui donne les 193 premières décimales de π. On ne sait pas pourquoi, mais le fait du hasard semble hautement improbable…

Ah ! Au fait, la somme des 144 premières décimales donne…. Le chiffre de la bête dont on a déjà parlé ! Le mal est décidément partout.

Irrationnel et même transcendant ! : Tout d'abord, π n'est pas un décimal (il n'a pas un nombre fini de chiffre après la virgule) et il n'est pas non plus rationnel (on ne peut pas l'écrire sous la forme de quotient de deux entiers naturels. La preuve de ceci est due à Lambert en 1761. Mais il y a mieux, π est transcendant ; ce qui veut dire que l'on ne peut pas trouver de polynôme à coefficients entiers dont π est une racine. C'est Lindemann qui l'a démontré en 1882 en se basant sur les travaux de Hermite de 1873.

Quand la poésie devient mnémotechnique:

« Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages, Immortel Archimède, artiste ingénieur, qui de ton jugement peut briser la valeur pour moi ton problème eut de pareils avantages. Jadis, mystérieux, un problème bloquait tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose que Pythagore découvrit aux anciens Grecs. O quadrature ! Vieux tourment du philosophe, insoluble rondeur, trop longtemps vous avez défié Pythagore et ses imitateurs. Comment intégrer l'espace plan circulaire ? Former un triangle auquel il équivaudra ? Nouvelle invention : Archimède inscrira dedans un hexagone : appréciera son aire fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra : dédoublera chaque élément antérieur : toujours de l'orbe calculée approchera ; définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur de cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle professeur, enseignez son problème avec zèle.»

Et en anglais, so british, as usual :

"How I wish I could enumerate Pi easily, since all these horrible mnemonics prevent recalling any of pi's sequence more simply."

En fait, on peut jouer dans toutes les langues:

„Kur e shoh e mesoj sigurisht"

(Vous avez trouvé quelle est cette langue?....)

De toutes façons, si vous avez un trou de mémoire, vous pourrez toujours téléphoner à Akira Haraguchi, il connaît par cœur les 100 000 premières décimales de π, mais il faudra un forfait longue durée car il lui faut tout de même 16h pour les énumérer.

Ah !...Les belles formules ! (de quoi briller en société !) :

Viète (1540-1610) écrit

$$\boxed{\pi = 2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\ldots}$$

Brouncker (1620-1684) :

$$\boxed{\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ldots}}}}}$$

Wallis (1616-1703) : $\boxed{\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\times2\times4\times4\times6\times6\times\ldots}{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\ldots}}$

Leibniz (1646-1716): $\boxed{\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{5\times7}+\dfrac{1}{9\times11}+\ldots}$

Euler (1707-1783): $\boxed{\dfrac{\pi^2}{6}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)}$ (il en calcula 20 décimales en une heure via cette formule. Allez-y ! Essayez sans machine !)

En 1910, Srinivasa Ramanujan dont nous avons déjà parlé, découvrit la formule suivante :

$$\boxed{\pi=\frac{9801}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}\right)^{-1}}$$

Il n'en donna aucune démonstration (mais en 1985 Jonathan et Peter Bornwein en donnèrent une preuve complète). A chaque itération (si on calcule les termes de la suite en remplaçant $+\infty$ par 1, 2, 3 …), on trouve huit décimales exactes de plus !

Ainsi, le quatrième terme donne

$$\pi \simeq \frac{9801}{2\sqrt{2}}\times\frac{5092995778815296116629307574030815237690 55}{46174031322948800321495176122727189 7088}$$

Soit 38 chiffres exacts après la virgule. Le douzième terme donne les cent premières décimales. J'ai laissé le programme sous Maple en téléchargement sur le site.

Mais il y a mieux : En 1994, les frères Gregory et David Chudnovsky surpassèrent Ramanujan en proposant la formule suivante :

$$\boxed{\pi=\left(12\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(6n!)(13\ 591\ 409+545\ 140\ 134n)}{(3n!)(n!)^3(640\ 320)^{3n+3/2}}\right)^{-1}}$$

Qui fournit 14 décimales exactes après chaque itération.

Le saviez-vous ? : Le français est la seule langue dans laquelle on dit « ordinateur » et non calculateur. Ce mot, qui se trouve dans *Le Littré* comme adjectif désignant « *Dieu qui met de l'ordre dans le monde.* » a été proposé non par un scientifique, mais par un philologue, Jacques Perret, en 1955, à IBM France, et a été retenu contre l'anglicisme « computeur ». Le choix de ce qualificatif divin n'est sans doute pas innocent et trahit l'image de l'ordinateur dans les mentalités de l'époque.

Fin de crise : En ces temps de crise financière, je ne peux résister au plaisir de vous conter une anecdote concernant une branche particulière des sciences, à mi-chemin entre informatique et mathématique : la théorie du langage automate. L'un des tous premiers automates de distribution de billets de banque fonctionnait sur l'algorithme suivant : Si vous demandiez une somme à retirer, l'ordinateur regardait si le solde moins le montant demandé était négatif et, dans le cas contraire, distribuait un billet de montant minimum avant de recommencer. On voit tout de suite comment vider la caisse (en demandant 0 franc par exemple !)….

(Une solution à laquelle le Secrétaire d'Etat Paulson n'a pas pensé.)

La ruse suivante : (Une charade pitoyable mais d'actualité)

Mon premier est un animal qui travaille avec sa queue et qui est très étroit...

Mon deuxième est un animal qui travaille avec sa queue et qui est très étroit...

Mon troisième est un animal qui travaille avec sa queue et qui est très étroit...

Mon tout est un nombre bien connu de tout le monde.

La ruse précédente : Il suffit de regarder tous les triplets possibles dont le produit est 36. La personne à qui la question a été posée connaît le numéro de rue de cette maison et devrait trouver sans problème le triplet solution. Mais elle dit qu'il lui manque un indice. Donc la solution est un triplet qui laisse une ambiguïté, autrement dit, il doit y avoir plusieurs triplets donnant la même somme. En effet, en considérant les triplets trouvés, il n'y a que (1,6,6) et (2,2,9) qui ont cette propriété. On détermine lequel est le bon en notant qu'il existe une aînée, ce qui élimine (en capilotractant) le cas des jumeaux de 6 ans. D'où la solution : 2,2 et 9 ans.

P.S. La langue cherchée à la page précédente est l'albanais bien sûr. Allez, rien que pour vous, une autre :

Piv a zebr a-walc'h dimerc'her ? Ne lavaro netra, tud Breizh !

Pour nous écrire (avec un stylo) :

Thierry SAGEAUX

Lycée Gustave Eiffel

143 cours de la Marne

33 031 Bordeaux

et avec un clavier : thierry.sageaux@free.fr

Archives sur http://thierry.sageaux.free.fr