#5

Nombres complexes

Exercice 1. ♪

Soit $\mathscr{P} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré et $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ le disque unité ouvert.

Montrer que $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{D} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$ est une bijection.

Modules et arguments

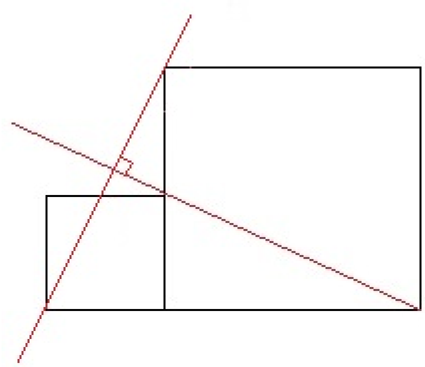
Exercice 2.

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, on a

$$|z - (1+i)| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{10} - 1 \leq |z - 4| \leq \sqrt{10} + 1.$$

Exercice 3. ♪ *Un énorme classique !*

On dessine deux carrés de longueur de côtés différentes que l'on met côte à côte. Montrer que les deux droites sont perpendiculaires.



Exercice 4. ♪

Déterminer le module et l'argument de $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{32} \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{2001} \left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{4}$.

Exercice 5. ♪

Les points d'affixes -2, 2, $1-i$ et $1-3i$ sont-ils cocycliques ?

Exercice 6. ♪ *ENSM 2015 On se place dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et on considère pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{C}$, le point M_α d'affixe $\alpha^2 - \alpha$.*

1) On considère les points M_α et $M_{\alpha+3}$.

a) Montrer que O est le milieu de $[M_\alpha, M_{\alpha+3}]$ lorsque $\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0$.

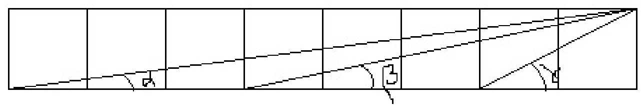
b) En déduire les valeurs de α pour lesquelles O est le milieu de $[M_\alpha, M_{\alpha+3}]$.

2) Montrer que lorsque $|\alpha - \frac{1}{2}| = 2$ alors M_α est sur un cercle de rayon 4 et de centre Ω d'affixe $\dfrac{-1}{4}$.

3) On suppose ici qu'il existe $\theta \in [-\pi; 0]$ tel que $\alpha = e^{i\theta}$.
Déterminer un argument de $\alpha^2 - \alpha$.

Exercice 7. ♪

Dans la figure ci-dessous, il y a huit carrés. Déterminer $\alpha + \beta + \gamma$.



Exercice 8. ♪

Trouver le module et l'argument de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.

Exercice 9. ♪

Résoudre $\begin{cases} |x| = |y| = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Exercice 10. ♩ *Concours Général 1986*

1) Montrer que si u et v sont deux complexes, alors $|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$.

2) En déduire que si $(u_i)_{i=1}^4 \in \mathbb{C}^4$, alors $\sum\limits_{i=1}^{4} |u_i| \leq \sum\limits_{i \neq j} |u_i + u_j|$.

Exercice 11. ♪

Calculer $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$ de deux façons différentes.

Exercice 12. ♩

Déterminer $\sin \dfrac{\pi}{5}$.

Exercice 13. ♩

Si $|z| = |z'| = 1$, montrer que $\dfrac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}$.

Exercice 14. ♪

Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a

1) $|1 + z| \geq \dfrac{1}{2}$ ou $|1 + z^2| \geq 1$,

2) $|1 + 2z| \geq 1$ ou $|z^2 + z + 1| \leq 1$.

Exercice 15. ♩

Trouver l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a - b| = |a + b|$.

Exercice 16. ♩

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $|a| = |b| = |c| = 1$. Montrer que $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

Exercice 17. ♪

Montrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$|z\overline{z'} - 1|^2 - |z - z'|^2 = \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |z'|^2\right)$$

Exercice 18. ♩

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{U}$ on a $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Exercice 19. *Équation trigonométrique*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre : $\begin{cases} \cos(a)+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0 \\ \sin(a)+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0. \end{cases}$

Exercice 20. $z=(1+ia)/(1-ia)$

Soit $z \in \mathbb{U}$. Peut-on trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $z=\dfrac{1+ia}{1-ia}$?

Exercice 21.

Calculer $\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}$.

Exercice 22.

On suppose $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z)>0$ et $|z^2-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$. Montrer que $|z-\frac{1}{3}|<\frac{2}{3}$.

Exercice 23. $\sum z_i+z_j$

1) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|+|u-v| \geq |u|+|v|$, et déterminer les cas d'égalité.

2) Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{4}|z_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{3}\sum\limits_{\ell=k+1}^{4}|z_k+z_\ell|$.

Exercice 24.

Soient a, b, c des complexes de module 1 vérifiant $a+b+c=1$. Montrer que l'un au moins des trois nombres vaut 1 et que les deux autres sont opposés.

Exercice 25.

1) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Vérifier que $\left(|u|^2-|v|^2\right)^2=\left(\dfrac{|u+v|^2+|u-v|^2}{2}\right)^2-4|uv|^2$.

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. CNS pour que les racines de $z^2+\alpha z+\beta=0$ aient même module ?

Exercice 26.

Calculer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$. En déduire $\cos\frac{\pi}{10}$.

Exercice 27. *Moyennes géométrique et arithmétique*

1) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $m=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et μ une racine carrée de $\alpha\beta$. Montrer que $|\alpha|+|\beta|=|m+\mu|+|m-\mu|$.

Exercice 28.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right|=\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|$.

Exercice 29.

Déterminer le module et un argument de $1+e^{i\theta}$, $1-e^{i\theta}$ et de $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

Conjugués

Exercice 30.
Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que z^7 et $\dfrac{1}{z^2}$ soient conjugués.

Exercice 31.
Soient $a, b \in \mathbb{U}$ distincts et $z \in \mathbb{C}$. On note $u = \dfrac{z + ab\overline{z} - a - b}{a - b}$. Montrer que $u^2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 32.
Résoudre $z^3 = \bar{z}$.

Exercice 33.
Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $a \neq b$ et $|a| = |b| = 1$; Montrer que $Z = \dfrac{z + ab\bar{z} - (a + b)}{a - b} \in$ ß$\mathbb{R}$.

Exercice 34.
Montrer que si $A = n^2 + m^2$ avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, alors A^k est aussi somme de deux carrés pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Polynômes

Exercice 35. *Équations du second degré*
Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$

Exercice 36. ♪
Résoudre $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$.

Exercice 37.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^4 - 4iz^3 + (3 - 12i)z^2 - (24 + 14i)z + 12 - 36i = 0$ en sachant qu'il y a une racine imaginaire pure.

Exercice 38.
Résoudre $z^4 + 2\lambda^2(1 + \cos\theta)\cos\theta z^2 + \lambda^4(1 + \cos\theta)^2 = 0$ avec $\theta \in [0; \frac{\pi}{4}[$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Calculer $\sum\limits_{k=1}^{4} z_k^n$ pour les racines du polynôme précédent.

Exercice 39. *Ensi P 91*
Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$.

Exercice 40.
Résoudre $z^5 - 5z^4 + 12z^3 - 26z^2 + 32z - 24 = 0$.

Exercice 41.
Comment faut-il choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation : $z^2 - (2 + im)z - (1 + im) = 0$ admette deux racines imaginaires conjuguées ?

Exercice 42. *Résoudre* $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$.

Exercice 43. *Résoudre* $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{2n} - 2\cos\alpha\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{n} + 1 = 0$.

Exercice 44. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^{3} = i$.

Racines de l'unité

Exercice 45. $u+v+w=0$

Soient u, v, w trois complexes unitaires tels que $u+v+w=0$. Montrer que $u=jv=j^2w$ ou $u=jw=j^2v$.

Exercice 46. *Racines de l'unité*

Résoudre :

1) $(z+1)^n=(z-1)^n$.
2) $(1+z)^n=(1-z)^n$.
3) $(z+1)^n=z^n=1$.
4) $z^4-z^3+z^2-z+1=0$.
5) $1+2z+2z^2+\cdots+2z^{n-1}+z^n=0$.
6) $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\dfrac{1+i\tan a}{1-i\tan a}$.
7) $\overline{x}=x^{n-1}$.
8) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3=0$.
9) $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)+1=0$.

Exercice 47.

Résoudre $(z+1)^6+(z-1)^6=0$.

Exercice 48. *Sommes sur les racines de l'unité*

Soit $\omega=\exp\dfrac{2i\pi}{n}$. Calculer :

1) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.
2) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sum\limits_{\ell=k}^{n-1}C_\ell^k\omega^{k+\ell}$.

Exercice 49. *Sommes sur les racines de l'unité*

Si ζ_n est une racine n^{e} de l'unité, calculer $S=1+2\zeta_n+3\zeta_n^2+\cdots+n\zeta_n^{n-1}$.

Exercice 50.

Soit a un complexe de module 1. On note $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines de l'équation $z^n=a$. Montrer que les points d'affixes $(z_1+1)^n, \ldots, (z_n+1)^n$ sont alignés.

Exercice 51.

Trouver les nombres complexes dont le conjugué est égal à l'une de ses puissances.

Exercice 52. *Somme des puissances p-èmes des racines de l'unité*

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-èmes de 1.

1) Calculer $\sum\limits_{x\in\mathbb{U}_n} x^p$.

2) Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $M=\max\{|P(x)|,\ x\in\mathbb{U}_n\}$. Montrer que tous les coefficients de P sont bornés par M.

Exercice 53. *Sommes de Gauss : $\sum\omega^{k^2}$*

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $\omega=e^{2i\pi/n}$ et $Z=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}$.

1) Soit $r\in\mathbb{Z}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{rk}$ en fonction de r.

2) Montrer que l'application $\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par $\varphi(k)=\omega^{k^2}$ est n-périodique.

3) Soit $j\in\mathbb{Z}$. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{(k+j)^2}=G$.

4) Montrer que $Z\overline{Z} = n$ et en déduire $|Z|$.

Exercice 54.
Soient $n \geq 1$ et $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} (z+\zeta^k)^n = n(z^n+1)$.
2) En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.

Exercice 55.
Pour $\alpha \in]0; 2\pi[$, déterminez $|e^{i\alpha}-1|$ et $\arg(e^{i\alpha}-1)$.
En déduire $\sum_{k=0}^{n} \cos kx$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin kx$.

Exercice 56. $e^{2i\pi/7}$
Soit $z = \exp\frac{2i\pi}{7}$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.
1) Calculer $u+v$ et u^2.
2) En déduire $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$.

Exercice 57. *Calcul de produit*
Simplifier $x = \prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}$ en utilisant $1, j, j^2$.

Exercice 58. *Position des racines carrées*
Soit $z \in \mathbb{C}$ et p, q ses racines carrées. A quelle condition z, p, q forment-ils un triangle rectangle en z ?

Sommes

Exercice 59.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k} (z-1)^{k-1}.$$

Calculer $f(z)$.

Exercice 60. *Sommes trigonométriques*
Simplifier :

1) $\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta)$.

2) $\sum_{k=1}^{n} \sin^3(k\theta)$.

3) $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$.

Exercice 61.
Calculer $S_n = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \cdots + \frac{\cos(nx)}{\cos^n x}$.

Exercice 62. $\sum \cos^{2p}(x + k\pi/2p)$
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Simplifier $\cos^4\theta + \cos^4\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\theta + \dfrac{2\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\theta + \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

2) Simplifier $\cos^6\theta + \cos^6\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cdots + \cos^6\left(\theta + \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

3) Simplifier $\cos^{2p}\theta + \cos^{2p}\left(\theta + \dfrac{\pi}{2p}\right) + \cdots + \cos^{2p}\left(\theta + \dfrac{(2p-1)\pi}{2p}\right)$.

Exercice 63. $\sum \cos(kx)/\cos x^k = 0$

Résoudre : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$.

Exercice 64. $\sum C_n^k x^{n-k}\cos(k\alpha) = 0$

Résoudre en x : $x^n + C_n^1 x^{n-1}\cos\alpha + \cdots + C_n^n\cos(n\alpha) = 0$.

Exercice 65. $\sum 2^{-k}/\cos\theta\ldots\cos(2^k\theta)$

Simplifier $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\ldots\cos 2^{k-1}\theta}$.

Exercice 66. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, calculer* $C_n = 1 + \dfrac{\cos x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \cdots + \dfrac{\cos nx}{\cos^n x}$.

Géométrie

Exercice 67.

On note A_k les points d'affixes $z_k = a(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n})$ avec $a > 0$. Soit M le point d'affixe $z = \rho e^{i\theta}$.

1) Montrer que $z^n - a^n = (z-a)(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})$.

2) En déduire que $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = n2^{n-1}$.

3) Que devient la formule si $n = 2p$?

4) Si $a \neq 1$, calculer $\prod\limits_{k=0}^{n-1} ||\overrightarrow{MA_k}||$ puis $\prod\limits_{k=1}^{n-1} ||\overrightarrow{A_0A_k}||$.

Exercice 68. *Triangle équilatéral*

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.

2) j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.

3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

4) $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} = 0$.

Exercice 69.

Trouver les racines cubiques de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Exercice 70.

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$, $z = e^{i\theta}$ et $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$.

1) Montrer que $Z = i\,\text{cotan}\,\frac{\theta}{2}$.

2) Trouver θ pour que Z soit défini.

3) Que vaut $|Z|$?

4) Quelle est cette transformation ?

Exercice 71.

On pose $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \end{array}$

1) Trouver les parties réelle et imaginaire de $f(z)$.

2) Quelle est l'image d'un cercle de centre O par f ?

Exercice 72. *Sommets d'un carré*

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{cases} a + ib & = c + id \\ a + c & = b + d. \end{cases}$

Que pouvez-vous dire des points d'affixes a, b, c, d ?

En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $(z-a)^4 = (z-b)^4 = (z-c)^4 = (z-d)^4$.

Exercice 73. *Configuration de points*

Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que ...

1) z, z^2, z^4 sont alignés.

2) $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle.

3) $z, \dfrac{1}{z}, -i$ sont alignés.

Exercice 74. $a + b + c = 1$

Trouver $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ abc = 1. \end{cases}$

Exercice 75. *Équations affines*

1) Montrer que toute droite du plan a pour équation complexe : $az + \overline{az} = b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{R}$.

2) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, a, b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } az + b\overline{z} = c\}$.

Exercice 76. *Transformation homographique*

Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} \setminus \{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}$

1) Montrer que f est bijective.

2) Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$, $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Exercice 77. $z + 1/z = 2$

Trouver les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\left| z + \dfrac{1}{z} \right| = 2$.

Exercice 78. *Symétrique par rapport à une droite*

Les points A, B, M ayant pour affixes a, b, z, calculer l'affixe du symétrique de M par rapport à la droite (AB).

Exercice 79. *Orthocentre*

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que si deux des rapports $\dfrac{d-a}{b-c}, \dfrac{d-b}{c-a}, \dfrac{d-c}{a-b}$ sont imaginaires purs, alors le troisième l'est aussi.

Exercice 80. *Centre du cercle circonscrit*

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, affixes de points A, B, C non alignés. Calculer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC en fonction de a, b, c.

Exercice 81. *Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont donnés de centres O et O' et de rayon r et r'. On note Γ un cercle tangent extérieurement en T et T' à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement. On note Ω le centre de Γ.*

1) Déterminer comment tracer Γ si on donne seulement un point T sur $\mathcal{C}$.

2) On note C le point d'intersection de (TT') et de (OO'). Montrer que C est indépendant du choix de T.

Exercice 82. *(Concours général 1989 - Ex2.1)*
Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 z_2 = 1$ et $|z_1 - z_2| = 2$.
On désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives -1, 1, z_1 et z_2.
Montrer que le quadrilatère AM_1BM_2 est en général un trapèze isocèle dont on calculera la longueur des côtés non parallèles.
Préciser les cas particuliers.

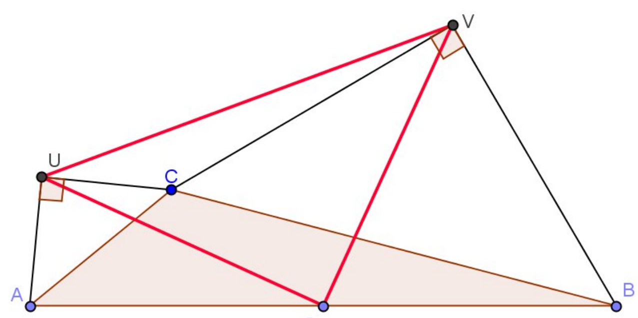
Exercice 83. *Sphère de* $\mathbb{R}^3$
Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $u + v \neq 0$. On pose $x = \dfrac{1 + uv}{u + v}$, $y = i\dfrac{1 - uv}{u + v}$, $z = \dfrac{u - v}{u + v}$.

1) CNS sur u et v pour que x, y, z soient réels ?
2) On suppose cette condition réalisée. Montrer que le point $M(x, y, z)$ dans l'espace appartient à la sphère de centre O et de rayon 1.
3) A-t-on ainsi tous les points de cette sphère ?

Similitudes

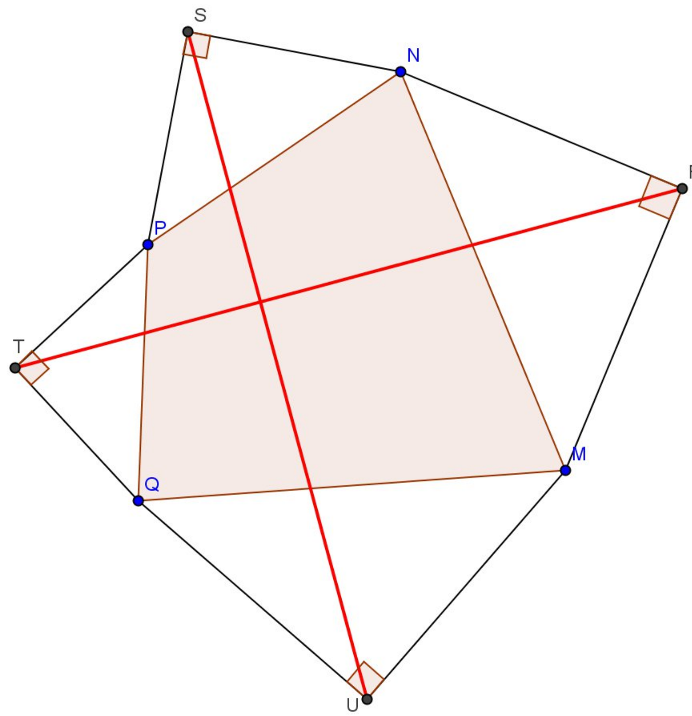
Exercice 84. *Similitudes dans un triangle*
On donne un triangle ABC, un réel positif k et un angle θ. On note S_M la similitude directe de centre M, de rapport k et d'angle θ. Soit C_1 déduit de C par S_A, B_1 déduit de B par S_C, A_1 déduit de A par S_B. Montrer que les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ ont même centre de gravité.

Exercice 85.
Soit le triangle ABC dans le sens direct. On note O le milieu de $[AB]$ et on construit les triangles isocèles rectangles extérieurs ACU et BVC. Montrer que OUV est rectangle isocèle.



Exercice 86.
Le quadrilatère $MNPQ$ est non croisé et de sens direct. Les triangles MNR, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles extérieurs au quadrilatère et de sens directs.

1) Montrer que $SU = TR$ et que $(SU) \perp (TR)$.
2) Le point d'intersection de ces deux droites est-il sur (MP) et (NQ) ?
3) Quel est le centre du quart de tour direct qui envoie S sur T ?



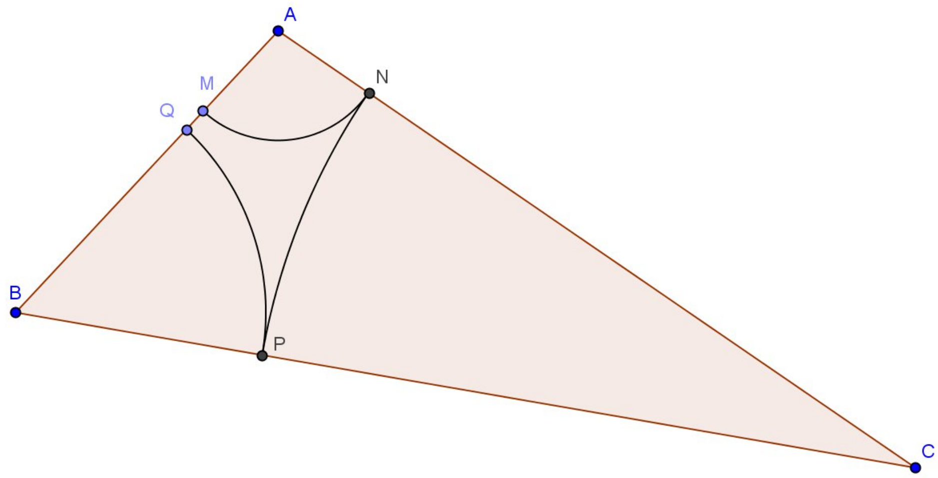
Exercice 87.

Le triangle ABC a pour centre de gravité le point G. On note I, J et K les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. On note M un point quelconque du plan et P, Q et R les symétriques de M par rapport respectivement à I, J et K.

Démontrez que les segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ ont même milieu.

Exercice 88.

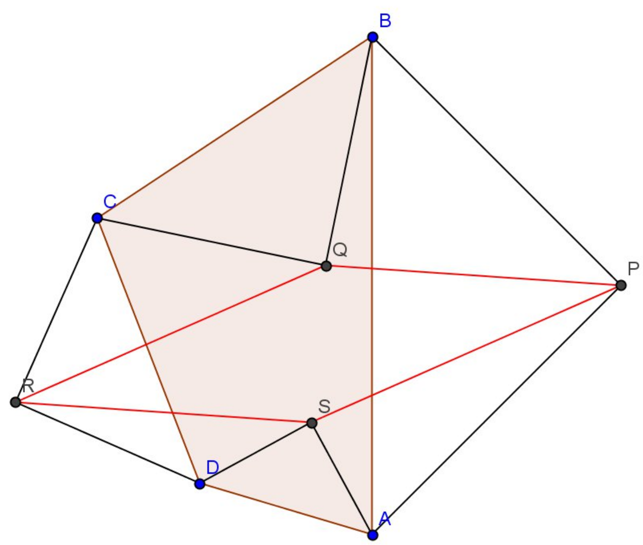
Le triangle ABC est quelconque. Le point M est un point de (AB). On construit tour à tour N, P et Q les points images respectivement de M par la rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, de N par la rotation de centre C et d'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et de P par la rotation de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. Est-il possible de trouver M tel que $M = Q$?



Exercice 89.

On note $ABCD$ un quadrilatère convexe.On construit les triangles APB, BQC, CRD et DSA isocèles rectangles respectivement en P, Q, R, et S.

Montrer que $PQRS$ est un parallélogramme.



Exercice 90. *Similitude*

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & (i-\sqrt{3})z+3+\sqrt{3+i(2\sqrt{3}+1)} \end{array}$.

1) Nature et éléments caractéristiques de f.

2) Déterminer l'image par f de la droite passant par $A(1-2\sqrt{3},0)$ et de direction $\overrightarrow{u}=(\sqrt{3},1)$.

Exercice 91. *Similitude*

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\theta \in]-\pi,\pi[$ et $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x',y') \end{array}$ avec

$$\begin{cases} x' = a + x(1+\cos\theta) - y\sin\theta \\ y' = b + x\sin\theta + y(1+\cos\theta) \end{cases}$$

Déterminer f.

Solutions des exercices

Exercice 5.

Il suffit de faire un dessin et de voir que si le centre existe, il est à l'intersection des médiatrices et d'affixe $-2i$. Deux distances différentes montrent qu'il n'est pas équidistant des quatre points.

Exercice 6.

1) a) $M_\alpha(\alpha^2-\alpha)$, $M_{\alpha+3}((\alpha+3)^2-(\alpha+3))$. Donc I a pour affixe $\alpha^2+2\alpha+3$.

b) $(\alpha+1)^2+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha+1+i\sqrt{2})(\alpha+1-i\sqrt{2})=0$

2) $M_\alpha\Omega = |\alpha-\frac{1}{2}|^2$.

3) $\alpha^2-\alpha = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 7.

En prenant un repère classique avec $A(0)$, $B(3)$, $C(6)$, $D(8)$ et $E(8+i)$. On cherche la somme de $\alpha=\arg(\frac{8+i}{8}) \quad (2\pi)$, $\beta=\arg(\frac{5+i}{5}) \quad (2\pi)$ et $\gamma=\arg(\frac{2+i}{2}) \quad (2\pi)$. Donc l'angle cherché est

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma &\equiv \arg\left(\frac{(8+i)(5+i)(2+i)}{8\times5\times2}\right) \quad (2\pi)\\ &\equiv \arg\left(\frac{65+65i}{80}\right) \quad (2\pi)\\ &\equiv \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)\end{aligned}$$

Exercice 8.

Avec la ruse du demi-angle "équilibré" :

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta'}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta'}{2}\right)}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}.$$

Exercice 9.

$x=y=1$.

Exercice 10.

1) Utiliser l'inégalité triangulaire sur $u=\dfrac{u+v}{2}+\dfrac{u-v}{2}$ et $v=\dfrac{u+v}{2}-\dfrac{u-v}{2}$

2) On applique deux fois la question précédente pour obtenir $\sum\limits_{i=1}^{4}|u_i| \leq |u_1+u_2|+|u_1-u_2|+|u_3+u_4|+|u_3-u_4|$.

On applique à nouveau la première inégalité sur $|u_1-u_2|+|u_3-u_4| \leq |u_1+u_3-(u_2+u_4)|+|u_1-u_2-u_3+u_4|$. Il reste à utiliser l'inégalité triangulaire deux fois.

Exercice 14.

1) Bourrin. On pose $z=x+iy$ et on arrive à $|1+z|<\dfrac{1}{2} \Rightarrow -y^2>x^2+2x+\frac{3}{4}$. En reportant dans $|1+z^2|^2>(x^2+y^2)^2+(2x+1)^2+\frac{3}{2}>1$.

2) Si $|1+2z|<1$ alors $|z+\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$ et en écrivant $z=\frac{-1}{2}+re^{i\theta}$ avec $0\leq r<\frac{1}{2}$. On reporte et on trouve $|z^2+z+1|\leq r^2+\frac{3}{4}>1$.

Exercice 15.

On élève au carré : $(a-b)(\bar{a}-\bar{b})=(a+b)(\bar{a}+\bar{b}) \quad \Leftrightarrow \quad -a\bar{b}-b\bar{a}=a\bar{b}+b\bar{a} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}e(b\bar{a})=0$.

Plus futé : on voit tout de suite que les parties imaginaires sont égales et on tombe sur un système facile à résoudre. $a-b=\alpha\geq 0$. Ce qui donne $a+b=\alpha e^{i\theta}$ D'où $a=\alpha\dfrac{e^{i\theta}+1}{2}$ et $b=\alpha\dfrac{e^{i\theta}-1}{2}$

Encore plus futé : On fait un dessin. On a deux points situés à la même ordonnée. On trace le parallélogramme obtenu avec la somme $a+b$ et on veut que les deux diagonales soient égales... Un rectangle donc. Sous quelle condition avons-nous un rectangle.

Exercice 16.

On a $|ab+bc+ca|=\dfrac{|ab+bc+ca|}{|abc|}=\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|=|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|=|a+b+c|$.

Exercice 17.

Utiliser la formule $|z|^2=z\overline{z}$.

Exercice 18.

Utiliser la somme des termes d'une suite géométrique.

Exercice 19.

$x\equiv -y\equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Exercice 20.

$z=e^{i\theta}\Rightarrow a=\tan\dfrac{\theta}{2}$ pour $\theta\not\equiv\pi\ [2\pi]$.

Exercice 23.

1) $|u+v|+|u-v|\geq 2|u|$ et $|u+v|+|u-v|\geq 2|v|$. Il y a égalité ssi $u=\pm v$.

2) $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|\leq |z_1+z_2|+|z_1-z_2|+|z_3+z_4|+|z_3-z_4|$,
$|z_1-z_2|+|z_3-z_4|\leq |z_1-z_2+z_3-z_4|+|z_1-z_2-z_3+z_4|\leq |z_1+z_3|+|z_2+z_4|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|$.

Exercice 24.

Utiliser $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ et développer $(z-a)(z-b)(z-c)$.

Exercice 25.

2) $\alpha=0$ ou $\beta=t\alpha^2,\ t\geq\dfrac{1}{4}$.

Exercice 27.

2) élever au carré : $|\alpha|^2+|\beta|^2+2\underbrace{|\alpha\beta|}_{|\mu|^2}=\underbrace{|m-\mu|^2+|m+\mu|^2}_{2|m|^2+2|\mu|^2}+2\underbrace{|m^2-\mu^2|}_{|\alpha-\beta|^2/4}$.

Exercice 28.

Les z_k ont tous le même argument modulo 2π.

Exercice 29.

- 1. Si $\theta\in[0,\pi[$, alors $|z|=2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z)\cong\frac{\theta}{2}\ [2\pi]$.

Si $\theta=\pi$, $z=0$.
Si $\theta\in]\pi,2\pi]$, alors $|z|=-2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z)\equiv\pi+\frac{\theta}{2}\ [2\pi]$.

- 2. Si $\theta\in\{0,2\pi\}$, alors $z=0$.

Sinon, $|z|=2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z)\equiv\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

- 3. z existe si $\theta\neq\pi$.

Si $\theta\in\{0,2\pi\}$ alors $z=0$.
Si $\theta\in]0,\pi[$, alors $|z|=\tan\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z)\equiv\dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi]$.
Si $\theta\in]\pi,2\pi[$, alors $|z|=\tan\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Exercice 31.
$\overline{u} = -u$.

Exercice 33.
Comme $\bar{a} = \frac{1}{a}$ et $\bar{b} = \frac{1}{b}$, on obtient vite $Z = \bar{Z}$.

Exercice 35.
$z_1 = -z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -z_4 = 1 - i$.

Exercice 36.
-1 est racine évidente.

Exercice 37.
On suppose qu'il y a une racine imaginaire pure ai. On a alors $a^2 - 2a - 3 = 0$, ce qui donne $a = -1$ ou $a = 3$. Donc $z_1 = -i$ et $z_2 = 3i$ sont racines. On factorise : $z^4 - 4iz^3 + (3-12i)z^2 - (24+14i)z + 12 - 36i = (z+i)(z-3i)(z^2 - 2iz - 12i + 4)$.
On résout $z^2 - 2iz - 12i + 4 = 0$. On trouve $\Delta = (4+6i)^2$ et $z_3 = -2i - 2$ et $z_4 = 4i + 2$.

Exercice 39.
$z = 1 \pm 2i$, $z = -4 \pm 2i$.

Exercice 40.
Si a est racine, $\bar{a}$ aussi.

Exercice 41.
$m = 2i$.

Exercice 42.
$\Delta = -25(3+4i) = (5i(2+i))^2$ et $z_1 = 5 - 12i$, $z_2 = -2i$.

Exercice 43.
On doit avoir $z \neq 1$ et $\alpha \not\equiv 0 \ (2\pi)$.
On pose $X = \dfrac{z+1}{z-1}$ et $\Delta = (2i \sin\alpha)^2$. Donc $X_1 = e^{i\alpha}$ et $X_2 = e^{-i\alpha}$. Dans le premier cas, on trouve $z_k = \dfrac{-i}{\tan(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n})}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Dans le second cas, on trouve $z'_k = \dfrac{-i}{\tan(\frac{-\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n})}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Exercice 44.
$z = \dfrac{e^{i(\frac{-5\pi}{12} + \frac{k\pi}{3})}}{2\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3})}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

Exercice 46.
1) $z = -i \operatorname{cotan} \dfrac{k\pi}{n}$.
2) $z = i \tan \dfrac{k\pi}{n}$.
3) $6 \mid n \Rightarrow z = j$ ou j^2. Sinon, pas de solution.
4) $z = \exp \dfrac{(2k+1)i\pi}{5}$, $k = 0, 1, 3, 4$.
5) $z = -1$ ou $z = \exp \dfrac{2ik\pi}{n}$, $1 \leq k < n$.
6) $x = \tan \left(\dfrac{a + 2k\pi}{n} \right)$.

8) $z = \pm i,\ \pm i(2 \pm \sqrt{3})$.

9) On pose $Z = \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)$ et on utilise $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = \dfrac{1 - Z^4}{1 - Z}$. On trouve alors $Z \in \{-1, i, -i\}$, ce qui donne $z \in \{-1, 0, 1\}$.

Exercice 48.

1) développer. $S = 2n$.

2) $\dfrac{1 - (1+\omega)^n}{1 - \omega - \omega^2} = \dfrac{1 + (2\cos(\pi/n))^n}{1 - \omega - \omega^2}$.

Exercice 49.

On écrit $S = (1 + \zeta_n + \zeta_n^2 + \cdots + \zeta_n^{n-1}) + (\zeta_n + \zeta_n^2 + \cdots + \zeta_n^{n-1}) + (\zeta_n^2 + \cdots + \zeta_n^{n-1}) + \cdots + \zeta_n^{n-1}$.
Avec la somme des termes d'une suite géométrique et le fait que $\zeta_n^n = 1$, on trouve :

$$S = \frac{1-1}{1-\zeta_n} + \frac{\zeta_n - 1}{1-\zeta_n} + \frac{\zeta_n^2 - 1}{1-\zeta_n} + \cdots + \frac{\zeta_n^{n-1} - 1}{1-\zeta_n} = \frac{(1 + \zeta_n + \cdots + \zeta_n^{n-1}) - n}{1 - \zeta_n} = \frac{n}{\zeta_n - 1}$$

Exercice 50.

On pose $\theta = \arg(a)$. On a $z_k = e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$. On calcule avec Euler $1 + z_k = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2n}} \times \cos\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$. On a alors

$$(1 + z_k)^n = \underbrace{2\cos^n\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right)}_{\in \mathbb{R}} e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)}$$

et ils ont tous pour argument $\dfrac{\theta}{2} + k\pi$. Ils sont donc alignés.

Exercice 51.

On a donc $\bar{z} = z^n$. En regardant les modules, on trouve $z = 0$ ou $|z^{n-1}| = 1$.
Si $n = 1$, l'équation devient $\bar{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$.
Si $n \neq 1$, le module étant un réel positif, $|z|^{n-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1$. On écrit alors $z = e^{i\theta}$ et l'équation devient $e^{-i\theta} = e^{ni\theta}$, ce qui équivaut à $-\theta \equiv n\theta\ [2\pi]$, i.e. $\theta = \dfrac{2k\pi}{n+1}$ avec $0 \leq k \leq n$.

Exercice 52.

1) $\sum = n$ si $p \not\equiv 0\ [n]$, 0 sinon.

2) $a_k = \displaystyle\sum_{x \in \mathbb{U}_n} \frac{P(x)}{nx^k}$.

Exercice 53.

1) Si $r \equiv 0\ (n)$ alors la somme vaut n, sinon, elle vaut 0.

2) $\varphi(k+n) = \varphi(k)$.

3) On somme sur une période.

4) $Z\overline{Z} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2}\omega^{-j^2} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\omega^{2kj} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{2kj}$.

Exercice 54.

1) On développe $(z + \zeta^k)^n$ et on intervertie les deux sommes.

2) Il suffit d'évaluer l'identité précédente en $z = e^{\frac{-i(2k-2)\pi}{n}}$. Et on trouve 0.

Exercice 56.

1) $u+v=-1$, $u^2=u+2v=-2-u$.

2) $\Sigma=\mathrm{Im}(u)=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 57.

$x=\dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$.

Exercice 58.

cercle circonscrit $\Rightarrow$ ssi $|z|=1$.

Exercice 60.

1) $\dfrac{n\sin\left(\dfrac{(2n+1)\theta}{2}\right)\sin\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{n\theta}{2}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$ si $\theta\not\equiv 0\ [2\pi]$.

2) $\dfrac{3\sin(n\theta/2)\sin\big((n+1)\theta/2\big)}{4\sin(\theta/2)}-\dfrac{\sin(3n\theta/2)\sin\big(3(n+1)\theta/2\big)}{4\sin(3\theta/2)}$.

3) Si $\theta\equiv 0\ (\pi)$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)=n+1$.

Sinon, on pose $S_1=\sum\limits_{k=0}^{n}e^{2ik\theta}=\dfrac{1-e^{2i(n+1)\theta}}{1-e^{2i\theta}}=e^{in\theta}\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ avec le demi-angle. Avec le conjugué complexe, on trouve que $\overline{S_1}=S_2=\sum\limits_{k=0}^{n}e^{-2ik\theta}=e^{-in\theta}\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

Et $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2}(\cos(2k\theta)+1)=\dfrac{1}{4}(S_1+S_2+2)=\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}(e^{in\theta}+e^{-in\theta})+\dfrac{n+1}{2}$.

D'où $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\cos n\theta+n+1\right)$.

Exercice 62.

1) $=3/2$.

2) $32\cos^6(\theta)=\cos 6\theta+6\cos 4\theta+15\cos 2\theta+10\Rightarrow\Sigma=\dfrac{15}{8}$.

3) $\Sigma_p=\dfrac{pC_{2p}^p}{2^{2p-1}}$.

Exercice 63.

$x\equiv 0\ \left[\dfrac{\pi}{n}\right]$, $x\not\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Exercice 64.

$\dfrac{1}{2}\Big((x+e^{i\alpha})^n+(x+e^{-i\alpha})^n\Big)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\mathrm{cotan}\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\sin\alpha-\cos\alpha$.

Exercice 65.

$S=\dfrac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}}+\dfrac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}}+\cdots+\dfrac{u-u^{-1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}}$.

$\dfrac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}}+\dfrac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}}=\dfrac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}}$.

$\dfrac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}}+\dfrac{u-u^{-1}}{u^8-u^{-8}}=\dfrac{u^7-u^{-7}}{u^8-u^{-8}}\ \ldots$

$\Rightarrow S=\dfrac{u^{2^n-1}-u^{-2^n+1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}}=\dfrac{\sin\big((2^n-1)\theta\big)}{\sin(2^n\theta)}$.

Exercice 66.

Si $\neq k\pi$, on pose $S_n = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \cdots + \dfrac{\sin nx}{\cos^n x}$. On a alors $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k$. Tout calcul fait : $C_n = \dfrac{\sin(n+1)x \cos x}{\cos(n+1)x \sin x} = \dfrac{\tan(n+1)x}{\tan x}$.

Exercice 68.

3) On écrit $c - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b)$, $b - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)$ et $a - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)$; d'où $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{a-c}{b-c}$ et $(c-b)(c-a) = (b-a)(a-b) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$.

Exercice 72.

Les diagonales se coupent en leurs milieux, ont même longueur, et sont perpendiculaires $\Rightarrow$ carré.

Exercice 73.

1) $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in -\dfrac{1}{2} + i\mathbb{R}$.

2) $z \in -1 + i\mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R}$ ou $\left|z + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.

3) $z \in i\mathbb{R}$ ou $|z - i| = \sqrt{2}$.

Exercice 74.

$(0, a, a+b, a+b+c = 1)$ forme un losange donc l'un des nombres vaut 1 et les deux autres sont opposés $\Rightarrow \{a, b, c\} = \{1, i, -i\}$.

Exercice 75.

2) si $|a| \neq |b|$: une solution unique,
si $|a| = |b|$: une droite ou $\emptyset$.

Exercice 76.

2) $\mathbb{U} \setminus \{1\}$, $i\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 77.

$z = x + iy \Rightarrow$ cercles $(\pm i, \sqrt{2})$ (laborieux).

Exercice 78.

$z' = \dfrac{(b-a)\bar{z} + a\bar{b} - \bar{a}b}{\bar{b} - \bar{a}}$.

Exercice 79.

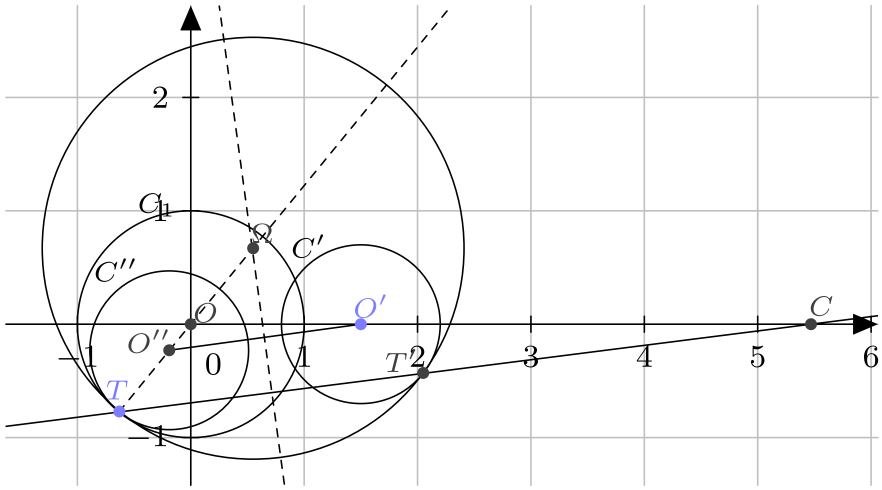
$d =$ orthocentre de abc.

Exercice 80.

$\omega = \dfrac{a(c\bar{c} - b\bar{b}) + b(a\bar{a} - c\bar{c}) + c(b\bar{b} - a\bar{a})}{a(\bar{c} - \bar{b}) + b(\bar{a} - \bar{c}) + c(\bar{b} - \bar{a})}$.

Exercice 81.

1) Il suffit de tracer le cercle $\mathcal{C}''$ de rayon r' et de centre O'' qui passe par T et qui est tangent intérieurement à $\mathcal{C}$. On a alors le point Ω est sur (OT), mais comme Ω étant équidistant de T et T', il est aussi sur la médiatrice de $[OO'']$.



2) On pose en complexe : $z_O = 0$, $r = 1$, $z_{O'} = \alpha$, $r' < 1$ et $z_T = e^{i\theta}$.

On a alors $z_{O''} = \lambda e^{i\theta}$ avec $\lambda \geq 0$ et ainsi $|z_{O''} - z_T| = |\lambda - 1| = r'$. Donc $\lambda = 1 - r'$ et $z_{O''} = (1 - r')e^{i\theta}$.

En posant $z_{T'} = x + iy$, comme $\overrightarrow{TT'}$ et $\overrightarrow{O'O''}$ sont colinéaires,

$$\begin{vmatrix} x - \cos\theta & (1-r')\cos\theta - \alpha \\ y - \sin\theta & (1-r')\sin\theta \end{vmatrix} = x(1-r')\sin\theta - y((1-r')\cos\theta - \alpha) - \alpha\sin\theta = 0$$

et si on cherche C, on a $y = 0$ par symétrie de la situation, d'où $x = \dfrac{\alpha\cancel{\sin\theta}}{(1-r')\cancel{\sin\theta}}$ qui est bien indépendant de θ.

Exercice 82.

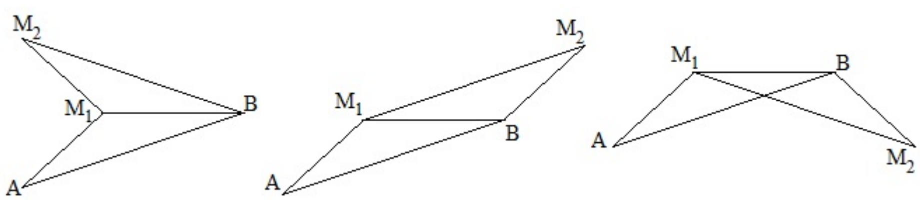
En combinant les deux équations données, on trouve $|z_1 - 1||z_1 + 1| = 2|z_1|$, soit $AM_1.BM_1 = 2OM_1$.

D'après la formule de la médiane, $AM_1^2 + BM_1^2 = 2OM_1^2 + \frac{1}{2}2^2 = 2(1 + OM_1^2)$.

On trouve alors $AM_1^2 = 2$ et $BM_1^2 = 2OM_1^2$. (Deux solutions, mais il y a symétrie par rapport à O).

Ainsi $BM_2 = \left|\dfrac{1}{z_1} - 1\right| = \dfrac{|z_1 - 1|}{|z_1|} = \dfrac{BM_1}{OM_1} = \sqrt{2} = AM_1$.

Les triangles ABM_1 et M_2M_1B sont isométriques sans être égaux. On regarde les trois dispositions possibles et il n'y a que la troisième qui fonctionne :



Les deux triangles sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[M_1B]$ et
- (AM_1BM_2) est un trapèze isocèle,
- $AM_1 = BM_2 = \sqrt{2}$,
- $BM_1 = \sqrt{2}OM_1$,
- $AM_2 = \sqrt{2}OM_2$.

Les cas de dégénérescence sont obtenus lorsque M_1 est sur la droite (AB) et l'on trouve dans ce cas $z_1 = \sqrt{2} - 1$ et $z_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Exercice 83.

1) $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tq $u = \alpha v$.

$x, y \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \dfrac{1}{|v|^2} \quad \Leftrightarrow \quad u = \dfrac{1}{\bar{v}}$.

3) il manque seulement les deux pôles.

Exercice 85.

On prend un repère complexe centré en O. En considérant la similitude de centre A transformant C en U, on trouve que $u - a = \frac{1}{2}(1+i)(c-a)$. De façon analogue, on trouve $v - (-a) = \frac{1}{2}(1-i)(c-(-a))$. d'où $v = -iu$.

Exercice 86.

1) On a avec les notations usuelles : $r = \dfrac{1+i}{2}m + \dfrac{1-i}{2}n$ et par permutation circulaire : $s = \dfrac{1+i}{2}n + \dfrac{1-i}{2}p$, $t = \dfrac{1+i}{2}p + \dfrac{1-i}{2}q$ et $u = \dfrac{1+i}{2}q + \dfrac{1-i}{2}m$. Donc $u - s = i(t-r)$.

3) Le milieu de $[NQ]$.

Exercice 87.

Considérer l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{-1}{2}$ et l'homothétie de centre M et de rapport 2. La composée est une symétrie centrale qui est le milieu commun aux trois segments.

Exercice 88.

Il suffit de composer les trois rotation qui envoie donc M sur Q. Il s'agit d'une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \pi$. On a donc une symétrie centrale. Par construction, ce centre est sur (AB) et c'est le milieu de $[MQ]$. Donc la seule solution est ce point.

Exercice 89.

On note s_A la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ et s_C la similitude de centre C, d'angle $\frac{-\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On a $s_C \circ s_A(S) = R$ et $s_C \circ s_A(P) = Q$. Or $s_C \circ s_A$ est une translation (similitude de rapport 1 et d'angle 0).

Exercice 90.

1) La transformation est du type $f(z) = az + b$, avec $a = 2e^{\frac{5\pi}{6}}$, il s'agit donc d'une similitude plane directe de rapport 2 et d'angle $\frac{5\pi}{6}$. Le point invariant a pour affixe $\omega = 1 + 2i$.

2) $f(A) = A'$ et $z_{A'} = 9 + 2i$. Avec $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$, on trouve $z_{\overrightarrow{u}'} = (i - \sqrt{3})z_{\overrightarrow{u}} = -4$. On trouve donc la droite passant par $A'(9,2)$ et de direction $\overrightarrow{u}' = (-4, 0)$.

Exercice 91.

La matrice de $\overrightarrow{f}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1+\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} & -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = 2\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

avec les formules de trigo. On en déduit que f est une similitude de rapport $2\cos\frac{\theta}{2}$ et d'angle $\frac{\theta}{2}$. La recherche de l'invariant donne le centre : $\Omega(b\sin\theta - a\cos\theta, a\sin\theta - b\cos\theta)$.