#11

Permutations

Exercice 1. *Générateurs de $\mathcal{S}_n$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les sous-ensembles suivants :

1) $A = \{(i, i+1) \text{ tq } 1 \leq i < n\}$.

2) $B = \{(1\ i) \text{ tq } 2 \leq i \leq n\}$.

3) $C = \{(1\ 2), (1\ 2\ \cdots\ n)\}$.

Exercice 2. *Générateurs de $\mathcal{S}_n$*

Montrer que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ s'écrit de manière unique : $\sigma = c_2^{\alpha_2} \circ c_3^{\alpha_3} \circ \cdots \circ c_n^{\alpha_n}$ où $c_i = (1\ 2\ \cdots\ i)$ et $0 \leq \alpha_i < i$.

Exercice 3. *$\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles*

1) Calculer $(a\ b\ c) \circ (b\ c\ d)$.

2) Montrer que le sous-groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles ($n \geq 3$).

Exercice 4. *$\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles*

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

1) Soit $i, j \in \{3, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Décomposer en cycles à supports disjoints la permutation : $\sigma = (1\ i\ 2) \circ (1\ 2\ j) \circ (1\ i\ 2)$.

2) On note $\mathcal{H}$ le sous-groupe de $\mathcal{A}_n$ engendré par les 3-cycles $(1\ 2\ k)$, $\quad 3 \leq k \leq n$.

a) Montrer que : $\forall\ i, j \geq 3$, avec $i \neq j$, $\mathcal{H}$ contient $(1\ 2) \circ (i\ j)$ et $(i\ j) \circ (1\ 2)$.

b) Montrer que : $\forall\ j \geq 3$, $\mathcal{H}$ contient $(1\ 2) \circ (1\ j)$ et $(1\ 2) \circ (2\ j)$.

c) Montrer que : $\forall\ i \neq j$, $\forall\ k \neq l$, $\quad (i\ j) \circ (k\ l) \in \mathcal{H}$.

d) Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{A}_n$.

Exercice 5. *Signature en fonction du nombre d'orbites*

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On note c le nombre de cycles à supports disjoints constituant σ, et f le nombre de points fixes.

Calculer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n, c, et f.

Exercice 6. *Nombre de transposition pour engendrer un cycle*

Soit $\sigma \in S_n$. On appelle *orbite de* σ toute partie X de $\{1, \ldots, n\}$ sur laquelle σ induit une permutation circulaire. (Les orbites sont les supports des cycles de σ, et les singletons constitués de points fixes)

On note $N(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.

1) Montrer que si τ est une transposition, alors $N(\tau \circ \sigma) = N(\sigma) \pm 1$.

2) Application : Quel est le nombre minimal de transpositions nécéssaires pour obtenir un n-cycle ?

Exercice 7. *Conjugaison*

Soient $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$. On dit que σ et σ' sont conjuguées s'il existe $\rho \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma' = \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$.

1) Montrer que tout conjugué d'un k-cycle est encore un k-cycle.

2) Montrer que σ et σ' sont conjuguées si et seulement si les cycles à supports disjoints de σ et σ' ont deux à deux mêmes longueurs.

Exercice 8. *Caractérisation de la signature*

Soit E un ensemble fini et $f : \mathcal{S}_E \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes.

1) Si σ est une transposition, que peut-on dire de $f(\sigma)$?

2) Montrer que deux permutations conjuguées ont même image par f.

3) En déduire que f est la fonction constante 1, ou bien f est la signature.

Exercice 9. *Calcul de signature*
Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$. Calculer $\varepsilon(\sigma)$.

Exercice 10. *Centre de $\mathcal{S}_E$*
Soit E un ensemble ayant au moins trois éléments.
1) Pour $a, b \in E$ distincts et $\sigma \in \mathcal{S}_E$, simplifier $\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1}$.
2) Quelles sont les permutations σ qui commutent avec $(a\ b)$?
3) En déduire que le centre de $\mathcal{S}_E$ est réduit à $\{\mathrm{id}_E\}$.

Exercice 11. *Commutant d'un n-cycle*
Soit $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n) \in \mathcal{S}_n$. Trouver toutes les permutations $\rho \in \mathcal{S}_n$ commutant avec σ. (Reconnaître $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$)

Exercice 12. *Commutant d'un produit de 5-cycles*
Dans $\mathcal{S}_{10}$, quelles sont les permutations qui commutent avec $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)$?

Exercice 13. *Puissances d'un k-cycle*
Soit σ un k-cycle de $\mathcal{S}_n$ et $p \in \mathbb{Z}$.
1) Si $p \mid k$, montrer que σ^p est le produit de p cycles à supports disjoints de longueur $\dfrac{k}{p}$.
2) Montrer que pour $p \wedge k = 1$, σ^p est un k-cycle (utiliser l'égalité de Bézout).
3) Dans le cas général, étudier la décomposition en cycles de σ^p.

Exercice 14. *Ordre maximal*
Trouver l'ordre maximal d'une permutation de $\mathcal{S}_{10}$.

Exercice 15. *Sous-groupe d'indice 2 dans $\mathcal{S}_n$*
Soit H un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ d'ordre $\dfrac{n!}{2}$. On note $K = \mathcal{S}_n \setminus H$.
1) Pour $\sigma \in H$, montrer que $\sigma H = H$ et $\sigma K = K$.
2) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Déterminer les ensembles σH, σK, $H\sigma$, $K\sigma$ suivant que $\sigma \in H$ ou $\sigma \in K$.
3) En déduire que si deux permutations sont conjuguées, alors elles sont toutes deux dans H ou toutes deux dans K.
4) Montrer enfin que $H = \mathcal{A}_n$.

Exercice 16. *Dénombrement*
Combien y a-t-il de permutations de $\mathcal{S}_{26}$ comportant trois points fixes, deux 3-cycles, un 5-cycle, et deux 6-cycles ?

Solutions des exercices

Exercice 3.
1) $(a\ b) \circ (c\ d)$.

Exercice 4.
1) $(1\ 2) \circ (i\ j)$.

Exercice 5.
$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n+c+f}$.

Exercice 9.
Compter les inversions ou récurrence : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n(n-1)/2}$.

Exercice 11.
Les puissances de σ.

Exercice 12.
Conjugaison : $\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^x \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)^y$,
ou $\tau = (1\ 6) \circ (2\ 7) \circ (3\ 8) \circ (4\ 9) \circ (5\ 10) \circ (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^x \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)^y$.
$\Rightarrow$ 50 éléments.

Exercice 14.
30.

Exercice 16.
$C_{26}^3 \times \dfrac{2C_{23}^3 \times 2C_{20}^3}{2!} \times 4!\, C_{17}^5 \times \dfrac{5!\, C_{12}^6 \times 5!\, C_6^6}{2!} = 10\,372\,722\,765\,601\,996\,800\,000$.