#34

Fractions rationnelles

Khôlles - Classes prépa — Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. *Substitution de fractions*

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ non constante et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$.

1) Montrer que $P \circ F \neq 0$.

2) Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} : \quad \mathbb{K}(X) & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ G & \longmapsto & G \circ F \end{array}$ est un morphisme injectif d'algèbre.

3) A quelle condition est-il surjectif ?

4) Montrer que tous les isomorphismes de corps de $\mathbb{K}(X)$ sont de cette forme.

Exercice 2. *Multiplicité des pôles*

Soient $F, G_0, \dots, G_{n-1} \in \mathbb{K}(X)$ telles que $F^n + G_{n-1}F^{n-1} + \cdots + G_0 = 0$.
Montrer que l'ensemble des pôles de F est inclus dans la réunion des ensembles des pôles des G_i.

Exercice 3. *Ensemble image d'une fonction rationelle*

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Étudier $F(\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles}\})$.

Exercice 4. *$F \circ G$ est un polynôme*

Trouver tous les couples $(F, G) \in \big(\mathbb{C}(X)\big)^2$ tels que $F \circ G \in \mathbb{C}[X]$ (utiliser l'exercice **??**).

Exercice 5. *Fractions invariantes*

1) Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(e^{2i\pi/n}X) = F(X)$. Montrer qu'il existe une unique fraction $G \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(X) = G(X^n)$.

2) Application : Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + e^{2ik\pi/n}}{X - e^{2ik\pi/n}}$.

Exercice 6. *Fractions invariantes*

Soit $H = \{F \in \mathbb{K}(X) \text{ tel que } F(x) = F(\frac{1}{X})\}$.

1) Montrer que : $F \in H \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, G \in \mathbb{K}(X)$ tel que $F(x) = G\Big(x + \frac{1}{X}\Big)$.

2) Montrer que H est un sous-corps de $\mathbb{K}(X)$.

3) Que vaut $\dim_H(\mathbb{K}(X))$? Donner une base de $\mathbb{K}(X)$ sur H.

Exercice 7. *Formule de Taylor*

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ définie en $a \in \mathbb{K}$. Démontrer que il existe une fraction G_n définie en a telle que :

$$F(X) = F(a) + (X-a)F'(a) + \cdots + (X-a)^{n-1}\frac{F^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (X-a)^n G_n(X).$$

Exercice 8. *Dérivée de $1/(x^2+1)$*

Soit $F = \dfrac{1}{X^2+1}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{Z}_n[X]$ tel que $F^{(n)} = \dfrac{P_n}{(X^2+1)^n}$.
Montrer que les racines de P_n sont réelles et simples.

Exercice 9. *Fractions de degré négatif*

Soit $A = \{F \in \mathbb{K}(X) \text{ tels que } \deg F \leq 0\}$. Démontrer que A est une sous-algèbre de $\mathbb{K}(X)$.
Chercher ses idéaux.

Solutions des exercices

Exercice 1.

3) ssi $\exists\, G \in \mathbb{K}(X)$ tel que $G \circ F = X \Rightarrow P \circ F = XQ \circ F$.

$$F = \frac{A}{B},\ A \wedge B = 1 \Rightarrow \begin{cases} A \mid (p_0 - Xq_0) \\ B \mid (p_n - Xq_n) \end{cases} \Rightarrow F \text{ est homographique.}$$

4) $F = \phi(X)$.

Exercice 3.

$F = \dfrac{P}{Q}$. Si $P = \lambda Q$: $\operatorname{Im} F = \{\lambda\}$.

Si $P = \lambda Q + \mu$: $\operatorname{Im} F = \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$.

Sinon, $\operatorname{Im} F = \mathbb{C}$.

Exercice 4.

1) $G =$cste.

2) F a un seul pôle $a \Rightarrow F = \dfrac{P}{(X-a)^k}$ et $G = a + \dfrac{1}{Q}$ avec $\deg P \leq k$.

3) $F \in \mathbb{C}[X] \Rightarrow G \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 5.

2) $n\dfrac{X^n+1}{X^n-1}$.

Exercice 6.

1) $\Rightarrow \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(\frac{1}{X})}{Q(\frac{1}{X})} = \dfrac{P(x)+P(\frac{1}{X})}{Q(x)+Q(\frac{1}{X})}$.

Exercice 9.

$I_k = \{F \text{ tels que } \deg F \leq -k\}$.