#36

Polynômes

Exercice 1. 𝅘𝅥𝅯

Montrer que les polynômes périodiques sont les polynômes constants.

Exercice 2.

Soit $P = X^3 + 1$. Déterminer quatre diviseurs de P dans $\mathbb{R}[X]$ ayant des degrés deux à deux distincts.

Exercice 3. *(Mines-Ponts 71-72)*

Sous quelles conditions sur $(n, p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2$ le polynôme $P(X) = X^{2n} + pX^n + q$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 4. *(Mines-Ponts 71-72)*

On donne deux polynômes A et B.

On demande de déterminer les polynômes C tels que chacun des trois polynômes divise le produit des deux autres.

Exercice 5. *(Mines-Ponts 71-72)*

Soit P un polynôme à coefficients réels, tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) > 0$.

Montrer qu'il existe Q et R polynômes à coefficients réels tels que $P = Q^2 + R^2$.

Exercice 6.

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P'^2 = 4P$.

Exercice 7. ♪ *(Animath 2018)*

Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{Z}^5$ un quintuplet d'entiers distincts tels que $(6-a)(6-b)(6-c)(6-d)(6-e) = 45$. Combien vaut $a + b + c + d + e$?

Exercice 8. ♩ *(Animath 2018)*

Soit $f(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 de $\mathbb{Z}[X]$. On suppose que $f(1) = 0$, $50 < f(7) < 60$ et $70 < f(8) < 80$. Déterminer l'entier k qui vérifie $5000k < f(100) < 5000(k + 1)$.

Exercice 9.

Soit $P_n(X) = (X + 1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$.

1) Montrer que $(X^2 + X)$ divise P_n.

2) -1 est-il racine double de P_n ?

3) Trouver le quotient de la division de P_n par $X^2 + X$.

Exercice 10.

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) + P(X)P(X + 1) = 0$.

Exercice 11.

Décomposer $P(X) = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$ en produit de polynômes irréductibles. En déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

Exercice 12. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Soient $P_0, \ldots, P_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P_k = k$ et $\forall i \neq j,\ \displaystyle\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)\mathrm{d}x = 0$.

1) Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg Q < n$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

2) Montrer que $P_n(x)$ a toutes ses racines simples, distinctes, réelles et appartenant à $[-1, 1]$.

Exercice 13. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Soit P un polynôme à coefficients réels qui a toutes ses racines réelles et distinctes. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $(P^2 + \alpha^2)$ a toutes ses racines distinctes.

Exercice 14. ♪

Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^3$ tel que $P^2 - XQ^2 = XR^2$.
Montrer que $P = Q = R = 0$.

Exercice 15.

Factoriser $P = X^{10} + X^5 + 1$ sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 16.

1) Trouver P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$ tel que $P^2 + Q^2 = (X^2 + 1)^2$.

2) Calculer $(P')^2 + (Q')^2$. Montrer que l'on peut choisir P_1 et Q_1, des primitives de P' et Q' telles que $P_1^2 + Q_1^2 = k(X^2 + 1)^3$ où $k \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Exercice 17. *(NEW)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. On suppose qu'il existe $k \geq 1$ tel que $a_k = 0$ et $a_{k-1}a_{k+1} > 0$. Montrer que P n'est pas scindé.

Exercice 18. *(NEW)*

On cherche une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de $P \in \mathbb{C}_3[X]$ pour qu'il existe une racine de P dont le carré soit le produit des deux autres.

Exercice 19.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1) Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

2) Résoudre $(z^2 - 3z + 1)^2 = 3z^2 - 8z + 2$.

Exercice 20. *(NEW) (Concours ATS 2012)*

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

1) Monter par récurrence qu'il existe une suite de polynômes P_n telles que $\phi^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x)\phi(x)$. Calculer P_0, P_1 et P_2.

2) Montrer par récurrence la relation $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_n'(x)$. En déduire que P_n est u polynôme de degré n, de même parité que n, de coefficient dominant $a_n = 1$.

3) Calculer $P_3(x)$ et $P_4(x)$.

4) Montrer que P_4 admet quatre racines réelles et les calculer.

Exercice 21. *Familles libres de polynômes*

Soit $a, b \in \mathbb{K},\ a \neq b$. On pose $P_k = (X - a)^k (X - b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

Exercice 22. *Formule de Van der Monde*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [[0, n]]$ on pose $P_k = X^k (1 - X)^{n-k}$. Démontrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer les composantes dans $\mathcal{B}$ de $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(X^n(1 - X)^n\big)$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Exercice 23. *Familles libres de polynômes*

Soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$ non constants. On pose $P_k = U^k V^{n-k}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est libre ...

1) lorsque $U \wedge V = 1$.

2) lorsque (U, V) est libre.

Exercice 24. *Ensi PC 1999*

Déterminer les polyômes $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tels que $P(X) + 1$ est multiple de $(X-1)^n$ et $P(X) - 1$ est multiple de $(X+1)^n$.

Exercice 25. *Opérateur différence*

On note $U_p = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}$, $\quad p \in \mathbb{N}$, et $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$

1) Démontrer que la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

2) Calculer $\Delta^n(U_p)$.

3) En déduire que : $\forall\, P \in \mathbb{K}_n[X]$, ona $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$.

4) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que :

$\big(\forall\, n \in \mathbb{Z}$, on a $P(n) \in \mathbb{Z}\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big($ les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières$\big)$.

5) Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $\Delta^n(f) = 0$.

Exercice 26. *(Polynomes de Tchebytchev)*

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1) Expliciter T_2 et T_3.

2) Déterminer le degré du polynôme T_n ainsi que son coefficient dominant.

3) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}$, et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

Exercice 27.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P - P' = \frac{X^n}{n!} \qquad \deg P = n.$$

Exercice 28. *Liberté de $P(X), \dots, P(X+n)$*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. Démontrer que la famille $\big(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n)\big)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

(Utiliser l'opérateur Δ de l'exercice précédent)

Exercice 29. $(X+z_0)^n, \dots, (X+z_k)^n$ *(Centrale MP 2003)*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $z_0, \dots, z_k$ des complexes. Soient les polynômes $P_0 = (X+z_0)^n, \dots, P_k = (X+z_k)^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(P_0, \dots, P_k)$ soit une base de $C_n[X]$.

Exercice 30. $P \longmapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{array}$

1) Chercher $\deg(\Phi(P))$ en fonction de $\deg P$.

2) En déduire $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

3) Montrer que : $\forall\, Q \in \mathbb{K}[X],\ \exists!\ P \in \mathbb{K}[X]$ tq $\begin{cases} \Phi(P) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0. \end{cases}$

Exercice 31. $P \longmapsto (X-a)(P'(X) + P'(a)) + P(X) - P(a)$

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & P & \longmapsto & (X-a)(P'(X)+P'(a))+P(X)-P(a). \end{array}$

Chercher $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Exercice 32. $A^3+B=C^3+D$

Soient $A,B,C,D \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\begin{cases} \deg A = \deg C = m \\ \deg B < 2m,\ \deg D < 2m \\ A^3+B=C^3+D. \end{cases}$

Montrer que $A=C$ et $B=D$.

Trouver un contre-exemple avec des polynômes à coefficients complexes.

Exercice 33. $P(n) \mid P(n+P(n))$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X],\ n \in \mathbb{Z}$, et $p=P(n)$. Montrer que p divise $P(n+p)$.

Exercice 34. $P(a/b)=0 \Rightarrow a-kb$ *divise* $P(k)$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a,b \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux tels que $P\left(\dfrac{a}{b}\right)=0$.

1) Montrer que a divise le coefficient constant de P.

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a-kb$ divise $P(k)$.

Exercice 35. *Automorphismes de* $\mathbb{K}[X]$

Pour $A \in \mathbb{K}[X]$ on note $\begin{array}{rccc} \Phi_A : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & P & \longmapsto & P\circ A \end{array}$

1) Démontrer que les applications Φ_A sont les seuls endomorphismes d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$.

2) A quelle condition Φ_A est-il un isomorphisme ?

Exercice 36. *Sous anneau non principal de* $\mathbb{K}[X]$

Soit $A=\{P \in \mathbb{K}[X]$ dont le coefficient de X est nul$\}$. Démontrer que A est un sous anneau non principal de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 37. *Équation* $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$

Trouver $P,Q \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux tels que $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$.

Exercice 38. *Équation* $X(X-1)P'+P^2-(2X+1)P+2X=0$

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que : $X(X-1)P'+P^2-(2X+1)P+2X=0$.

Exercice 39. $P(X)+P(X+1)=2X^n$

1) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_n(X)+P_n(X+1)=2X^n$.

2) Chercher une relation de récurrence entre P_n' et P_{n-1}.

3) Décomposer $P_n(X+1)$ sur la base $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

4) Démontrer que $P_n(1-X)=(-1)^nP_n(X)$.

Exercice 40. $(1-X)^nP+X^nQ=1$

1) Démontrer qu'il existe $P,Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ uniques tels que $(1-X)^nP+X^nQ=1$.

2) Montrer que $Q=P(1-X)$.

3) Montrer que : $\exists\ \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $(1-X)P'-nP=\lambda X^{n-1}$.

4) En déduire P.

Exercice 41. *Endomorphismes de* $\mathbb{K}[X]$ *qui commutent avec la dérivation*

Soit $\Phi \in \mathscr{L}\mathbb{K}[X]$ commutant avec la dérivation, c'est à dire : $\forall\ P \in \mathbb{K}[X]$, on a $\Phi(P')=\Phi(P)'$.

1) Démontrer qu'il existe un unique suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de scalaires tels que :

$$\forall\ P \in \mathbb{K}_n[X],\ \text{on a } \Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}.$$

(On écrit *formellement* : $\Phi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{D}^k$ avec $\mathrm{D}(P) = P'$)

2) Décomposer ainsi l'endomorphisme $\Phi : P \longmapsto P(X+1)$.

Exercice 42. *P est positif =>* $P + P' + P" + \dots$ *aussi*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) \geq 0$. Démontrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, on a $(P+P'+P''+\dots)(x) \geq 0$.

Exercice 43. $P(\tan\alpha) = Q\Big(\dfrac{1}{\cos\alpha}\Big)$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Existe-t-il $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\ \alpha \in \Big]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big[,\ P(\tan\alpha) = Q\Big(\dfrac{1}{\cos\alpha}\Big)$?

Exercice 44. $X^n + 1/X^n = P_n(X + 1/X)$

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ vérifiant :

$$\forall\ z \in \mathbb{C}^*,\ z^n + z^{-n} = P_n(z + z^{-1}).$$

2) Déterminer le degré, le coefficient dominant, et les racines de P_n.

3) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\tilde{P}$ le polynôme tel que :

$$\forall\ z \in \mathbb{C}^*,\ P(z) + P(z^{-1}) = \tilde{P}(z + z^{-1}).$$

Étudier l'application $P \longmapsto \tilde{P}$.

Exercice 45. ♩ *(d'après écrit ESTP)*

Soit n un entier naturel non nul.

On note $P_n(X) = \dfrac{1}{2i}[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}]$.

1) a) Déterminer P_1 et P_2.

b) Vérifier que $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$. Sont-ils irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2) a) Montrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.

b) Calculer $P_n(i)$.

c) Prouver par un argument géométrique que les racines sont réelles.

d) Déterminer les racines de P_n.

e) En développant P_n, trouver Q_n tel que $P_n(X) = Q_n(X^2)$.

f) Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.

3) Montrer que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

4) Illustrer graphiquement le fait que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[,\ 0 \leq \sin x \leq x \leq \tan x$.

En déduire que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{cotan}^2 x \leq \dfrac{1}{x^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2 x$.

5) Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ et calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

Exercice 46. *Polytechnique MP* 2000*

1) Donner un isomorphisme f entre $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathbb{C}_n[X]$.

2) Montrer que $\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ (a_0, \dots, a_n) & \longmapsto & (a_n, a_0, \dots, a_{n-1}) \end{array}$ est linéaire.

3) Si $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$, on définit le produit $\overline{PQ}$ comme le reste de la division euclidienne de PQ par $X^{n+1} - 1$. Montrer que l'application induite par σ sur $\mathbb{C}_n[X]$ (c'est-à-dire $f \circ \sigma \circ f^{-1}$) est l'application qui à P associe $\overline{XP}$.

4) Soit F un sous-espace de $\mathbb{C}^{n+1}$ stable par σ.
Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(F) = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}_n[X]\}$.

Exercice 47. *Centrale MP 2002*
Déterminer tous les polynômes P tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$ puis tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ et enfin tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Exercice 48. *Polytechnique MP 2002*
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ distincts et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Trouver $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \text{ tq } \forall\ i,\ P^{-1}(\{y_i\}) = \{x_i\}\}$.

Exercice 49. *ENS Ulm MP 2002*
Soit $S \subset \mathbb{N}$ fini et $P = \sum\limits_{s \in S} a_s X^s \in \mathbb{C}[X]$.
1) On suppose que les a_s sont réels. Montrer que P a moins de racines strictement positives distinctes que la suite (a_s) n'a de changement de signe.
2) On suppose que P vérifie : $\forall\ s \in S,\ P(s) = 0$. Montrer que P est nul.

Exercice 50. $\sum\limits_{k=1}^{100} \dfrac{k}{x-k} \geq 1$ *(Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)*
Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sum\limits_{k=1}^{100} \dfrac{k}{x-k} \geq 1$ est une réunion finie d'intervalles disjoints. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

Exercice 51. *Polynôme positif (Ens Ulm MP* 2003)*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer :
$(\forall\ x \geq 0,\ P(x) > 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\ \ell \in \mathbb{N}$ tq $(X+1)^\ell P(X)$ est à coefficients strictement positifs).

Exercice 52. *Diviseurs premiers de la suite $(P(n))$ (Ens ULM-Lyon-Cachan MP* 2003)*
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant et E l'ensemble des diviseurs premiers d'au moins un $P(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que E est infini.

Exercice 53. 𝅗𝅥 *Un théorème de Sunyer i Balaguer*
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $\forall c \in I$, $\exists N(c) \in \mathbb{N}$ tel que la dérivée de f à l'ordre $N(c)$ s'annule en c, alors f est un polynôme.

Exercice 54. *Centrale MP 2004*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X - P_n^2$ est divisible par X^n.

Exercice 55. *Polynômes à coefficients entiers, ULM-Lyon-Cachan MP* 2004*
On donne un entier $n \geq 0$.
Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, \dots, P_n$ dans $\mathbb{Z}_n[X]$ tels que $\forall\ i, j \in [[0, n]]$, $\displaystyle\int_{t=0}^{1} t^i P_j(t)\,\mathrm{d}t = \delta_{ij}$.

Solutions des exercices

Exercice 3.

On trouve $X^{3k+1} \equiv X\ (X^2+X+1)$, $X^{3k+2} \equiv -X-1\ (X^2+X+1)$ et $X^{3k} \equiv 1\ (X^2+X+1)$.

• Si $n = 3m$, alors $X^{2n} \equiv X^n \equiv 1$ et $1+p+q=0 \quad \Leftrightarrow \quad P(X) \equiv 0$.

• Si $n = 3m+1$, alors $X^{2n} \equiv -X-1$ et $X^n \equiv X$ et $P(X) = (p-1)X + (q-1)$ et il faut $p = q = 1$.

• Si $n = 3m+2$, alors $X^{2n} \equiv X$ et $X^n \equiv -X-1$ et $P(X) = (1-p)X + (q-p)$ et il faut $p = q = 1$.

Exercice 4.

On doit avoir trois polynômes Q_1, Q_2 et Q_3 tels que $AB = Q_1C$, $BC = Q_2A$ et $CA = Q_3B$.

En posant $D = A \wedge B$, on a $A = DA'$ et $B = DB'$ avec $A' \wedge B' = 1$. Alors $Q_1C = A'B'D^2$, $Q_2DA' = B'DC$ et $Q_3DB' = A'DC$. Donc A' et B' divisent C et $C = PA'B'$.

Pour que l'égalité soit vérifiée, il faut que $Q_1P = D^2$. Donc $\forall P$ diviseur de D^2, le polynôme $C = PA'B'$ vérifie les hypothèses $Q81P = D^2$ et $C = \dfrac{PAB}{D^2}$.

Exercice 5.

On déduit des hypothèses que $\deg P = 2n$ et que son coefficient dominant est positif.

Par récurrence sur n.

<u>Initialisation :</u> On a $P(x) = ax^2+bx+c = a\left[(x+\frac{b}{a})^2 + \frac{ca-b^2}{a^2}\right]$. Comme $P > 0$, on a $ac-b^2 > 0$ et $a > 0$, d'où $P = Q^2 + R^2$.

<u>Hérédité :</u> Par récurrence forte sur tous les polynômes de degré pair inférieur ou égal à $2n-2$. Soit p de degré $2n$. On peut toujours écrire $P = TQ$ avec $\deg T = 2$ positif et Q de degré $2n-2$ positif aussi. On a alors $Q = R^2 + S^2$ et $T = U^2 + V^2$. Donc $P = (UR+VS)^2 + (UR-VS)^2$.

Exercice 6.

En posant $\deg(P) = n$, on trouve $n = 2$ ou $n = -\infty$. En écrivant $P(X) = aX^2+bX+c$, on trouve

$$\begin{cases} 4a &= 4a^2 \\ 4ab &= 4b \\ b^2 &= 4c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a &= 1 \\ 4c &= b^2 \end{cases}.$$

Donc $P(X) = X^2 + bX + \dfrac{b^2}{4}$ et $\Delta = 0$ d'où une racine double qui vaut $\frac{b}{2}$.

On trouve donc la polynôme nul et les polynômes $(X - \frac{b}{2})^2$.

Exercice 7.

Le quintuplet est l'ensemble des racines de $P(X) = (6-X)^5 - 45$. Les fonctions symétriques élémentaires donnent la somme des racines. Donc $P(X) = -X^5 + \binom{6}{5}X^4 + ...$ Donc $a+b+c+d+e = 6$.

Exercice 9.

1) Il suffit de vérifier que $P_n(0) = P_n(-1) = 0$.

2) Il suffit de dériver $P_n'(-1) = -(2n+2) \neq 0$.

3) On cherche Q tel que $P_n = (X^2+X)Q$.

On a $P_n = (X+1)\left[(X+1)^{2n} - \sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^kX^{2n-k}\right] = (X+1)\left[\sum\limits_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}X^{2n-k} - \sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^kX^{2n-k}\right]$.

Pour $k = 2n$, on a $\binom{2n}{2n} - (-1)^{2n} = 0$. Donc,

$$P_n = X(X+1)\underbrace{\left[\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\binom{2n}{k} - (-1)^k)X^{2n-1-k}\right)\right]}_{=Q}$$

Exercice 10.

Soit a une racine de P, alors $P(a^2) + P(a)P(a+1) = 0 \;\Rightarrow\; P(a^2) = 0$. Par récurrence immédiate, a^{2n} est racine de P. Pour qu'il y ait un nombre fini de racines, il faut qu'il existe $p > q$ tels que $a^{2p} = a^{2q} \quad\Leftrightarrow\quad a^{2q}(a^{2(p-q)} - 1) = 0$. Donc $a = 0$ ou $a = \pm 1$.

On fait de même avec $P((a-1)^2) = 0$, ce qui donne $a - 1 = 0$ et $a - 1 = \pm 1$. En faisant l'intersection avec ce qui précède, on trouve que les seules racines sont 0 et 1. Donc $P(X) = \lambda X^p (X-1)^q$. On injecte dans l'équation : $\lambda = -1$ et $p = q$. Donc $\boxed{P(X) = -X^p(X-1)^p}$.

Exercice 11.

On utilise la décomposition due à la somme des termes d'une suite géométrique : $P(Z) = \dfrac{1-Z^n}{1-Z}$. Les racines sont les $z_k = \exp(\frac{2ki\pi}{n})$ pour k variant de 1 à $n-1$.

Donc $P(X) = \prod\limits_{k=1}^{n-1}(X - \exp(\frac{2ki\pi}{n}))$ sur $\mathbb{C}$. Pour avoir la décomposition sur $\mathbb{R}$, on regroupe les conjugués (cas $n = 2p+1$ impair) :

$$P(X) = (X+1)\prod_{k=1}^{p}(X - \exp(\tfrac{ki\pi}{n}))(X - \exp(\tfrac{-ki\pi}{n})) = (X+1)\prod_{k=1}^{p}(X^2 + 2X\cos\tfrac{k\pi}{n} + 1)$$

Or

$$\begin{aligned}
P(1) &= \prod_{k=1}^{n-1}(1 - \exp(\frac{2ki\pi}{n})) = \prod_{k=1}^{n-1}\exp(\frac{ki\pi}{n})(\exp(\frac{-ki\pi}{n}) - \exp(\frac{ki\pi}{n}))\\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\exp(\frac{ki\pi}{n})(-i)\sin(\frac{k\pi}{n})\\
&= 2^{n-1}\exp(\frac{(n-1)i\pi}{2})\prod_{k=1}^{n-1}(-i)\sin(\frac{k\pi}{n})\\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n}).
\end{aligned}$$

Or $P(1) = n$, donc $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 12.

1) Les degrés étant distincts deux à deux, $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc on peut écrire $Q = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k P_k$, d'où $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k \int_{-1}^{1} P_k(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

2) Comme $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_0P_n = 0$, alors P_n a au moins une racine dans $[-1,1]$. S'il existe $\alpha \notin [-1,1]$ racine de P_n, alors $P_n = (X-\alpha)Q$ avec $\deg Q < n$. D'après ce qui précède, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_nQ = 0 \;\Rightarrow\; \int_{-1}^{1}(X-\alpha)Q^2 = 0$, ce qui n'est pas possible car le polynôme est de signe constant sur $[-1,1]$.

On utilise la même astuce si P_n a deux racines complexes conjuguées en écrivant $P_n = (aX^2 + bX + c)Q$. Et encore la même si $P_n = (X-\alpha)^Q$.

Exercice 13.

P' a la même propriété que P (appliquer Rolle entre deux racines consécutives). Par l'absurde, soit β une racine multiple de $P^2 + \alpha^2$, alors $(P(\beta) - i\alpha)(P(\beta) + i\alpha) = 0$ donc $P(\beta) = \pm i\alpha$ et comme P est à coefficients réels, $\beta \notin \mathbb{R}$. De plus, β étant racine multiple de $P^2+\alpha^2$ alors $P(\beta)P'(\beta)=0$. Ce qui n'est pas possible car P et P' ont toutes leurs racines réelles.

Exercice 14.

On obtient $P^2 = X(Q^2+R^2)$, sauf que le polynôme de gauche est de degré pair et celui de droite est impair. La seule possibilité est qu'ils soient tous nuls.

Exercice 15.

On résout tout d'abord sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$ et enfin sur $\mathbb{Q}$:

• Sur $\mathbb{C}$: On commence par poser $Y = X^5$. On factorise $Y^2+Y+1 = (Y-j)(Y-j^2)$.

Puis $X^5 = j \quad \Leftrightarrow \quad X = e^{\frac{2ik\pi}{5}} e^{\frac{2i\pi}{15}} \quad 1 \leq k \leq 5$ et $X^5 = j^2 \quad \Leftrightarrow \quad X = e^{\frac{2ik\pi}{5}} e^{\frac{4i\pi}{15}} \quad 1 \leq k \leq 5$. D'où la factorisation sur $\mathbb{C}$:

$$P = \prod_{k=1}^{5} \left[\left(X - e^{\frac{i(6k+2)\pi}{15}} \right) \left(X - e^{\frac{i(6k+4)\pi}{15}} \right) \right]$$

• Sur $\mathbb{R}$: On regroupe les conjugués complexes ensemble.

$$\begin{aligned} P &= \left(X - e^{\frac{2i\pi}{15}}\right)\left(X - e^{\frac{28i\pi}{15}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{15}}\right)\left(X - e^{\frac{26i\pi}{15}}\right)\left(X - e^{\frac{8i\pi}{15}}\right)\left(X - e^{\frac{22i\pi}{15}}\right) \\ &\qquad \left(X - e^{\frac{10i\pi}{15}}\right)\left(X - e^{\frac{20i\pi}{15}}\right)\left(X - e^{\frac{14i\pi}{15}}\right)\left(X - e^{\frac{16i\pi}{15}}\right) \\ &= (X^2 - 2\cos\theta X + 1)(X^2 - 2\cos(2\theta)X+1)(X^2-2\cos(4\theta)X+1)\underbrace{(X^2 - 2\cos(5\theta)X+1)}_{=X^2+X+1}(X^2-2\cos(7\theta)X+1) \end{aligned}$$

en posant $\theta = \frac{2\pi}{15}$.

• Sur $\mathbb{Q}$: Toute factorisation sur $\mathbb{Q}$ est est une factorisation sur $\mathbb{R}$, mais comme les cinq polynômes précédents sont irréductibles, on ne peut obtenir les facteurs dans $\mathbb{Q}$ qu'en multipliant des facteurs précédents. Il faudra donc en regrouper 2 ou 4 car $\cos(k\theta) \notin \mathbb{Q}$ pour $k \in \{1,2,4,7\}$.

Or $(X^2 - 2\cos(k_1\theta)X+1)(X^2-2\cos(k_2\theta)X+1) = X^4 - 2(\cos(k_1\theta)+\cos(k_2\theta))X^3 + 2(1+2\cos(k_1\theta)\cos(k_2\theta))X + 1 \notin \mathbb{Q}[X]$ pour $(k_1,k_2) \in \{1,2,4,7\}^2$.

Mais $(X^2 - 2\cos\theta X+1)(X^2-2\cos(2\theta)X+1)(X^2-2\cos(4\theta)X+1)(X^2-2\cos(7\theta)X+1) = X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$. Ainsi,

$$P = (X^2+X+1)(X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1)$$

Exercice 16.

1) $P(X) = (X^2-1)\cos\alpha - 2X\sin\alpha$ et $Q(X) = (X^2-1)\sin\alpha + 2X\cos\alpha$.

Exercice 17.

Par contraposée, en utilisant $P^{(k-1)}(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-k}X^{n-k+1}$ avec $2b_0b_2 = ((k-1)!)^2 k(k+1)a_{k-1}a_{k+1} > 0$.

• Si $b_0 \neq 0$, ...

• Si $b_0 = 0$, ...

Exercice 18.

On pose $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et on note $x_1,\ x_2$ et x_3 les trois racines de P. On a $x_2^2 = x_1x_3$. Donc $ax_2^3 = ax_1x_2x_3 = -d$. On a $ax_2^3 + d = 0$ et $bx_2^2 + cx_2 = 0$.

• Si $x_2 \neq 0$, on obtient $ac^3 = db^3$.

• Si $x_2 = 0$, alors 0 doit être d'ordre au moins 2. Donc $d = c = 0$ et $ac^3 = db^3$ là encore.

Réciproquement,

• Si $b = 0$ alors $c = 0$ et les racines de P sont les racines cubiques de $\frac{-d}{a}$. Donc $x_2 = jx_1$ et $x_3 = j^2x_1$. D'où $x_2^2 = x_1x_3$.

• Si $b \neq 0$,on pose $x_2 = \frac{-c}{b}$ et comme $\frac{c^3}{b^3} = \frac{d}{a}$, on a $ax_2^3 = -d$ et $bx_2 = -c$, donc x_2 est racine de P et comme $ax_1x_2x_3 = -d = ax_2^3$, on a $x_2 = 0$ ou $x_1x_3 = x_2^2$. Si $x_2 = 0$, $c = d = 0$ et étant racine double de P, on a encore $x_1x_3 = 0$.

Exercice 19.
1) Utilise $P \circ P - P = \sum a_i(P^i - X^i)$.
2) $X^2 - 3X + 1$ et on trouve quatre racines : $2 - \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

Exercice 24.
$P(X) = -1 + Q(X) \times (X-1)^n \quad \Leftrightarrow \quad (X+1)^n \mid Q(X)(X-1)^n - 2 \quad \Leftrightarrow \quad X^n \mid Q(X-1)(X-2)^n - 2.$

Soit $2 = A(X)(X-2)^n + X^n B(X)$ la division suivant les puissances croissantes de 2 par $(X-2)^n$ à l'ordre n. On obtient $X^n \mid Q(X-1) - A(X)$ soit $Q(X) = A(X+1) + X^n R(X)$ et $\deg(P) < 2n \quad \Leftrightarrow$ $R = 0$.

Calcul de $A(X)$ par développement limité : $\dfrac{1}{(1+x)^n} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{-n}{k} x^k + (x^n)$ donc :

$$A(X) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-n}{k} \frac{(-1)^k X^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^k (-1)^n \frac{X^k}{2^{n+k-1}}$$

Exercice 26.
1) $T_2 = 2X^2 + 1$ et $T_3 = 4X^3 - 2X^2 - X$.
2) Par récurrence, $deg(T_n) = n$ et le coefficient dominant est 2^{n-1}.
3) Par récurrence là encore.

Exercice 27.
En résolvant le système, on obtient $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} X^k$.

Exercice 28.
$\mathrm{vect}(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n))$ contient $P, \Delta P, \Delta^2 P, \ldots, \Delta^n P$ donc $\mathbb{K}_n[X]$ d'après le thm des degrés étagés.

Exercice 29.
Déjà il est nécessaire que $k = n$. Supposant ceci réalisé, la matrice de $(P_0, \ldots, P_k)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ est équivalente à la matrice de Vandermonde de $z_0, \ldots, z_k$. Donc une CNS est : $k = n$ et $z_0, \ldots, z_k$ sont distincts.

Exercice 31.
$\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathbb{K}_0[X]$, $\mathrm{Im}\,\Phi = (X-a)\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Exercice 33.
Avec la formule de Taylor : $P(n+p) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(n)}{k!}(n+p-n)^k \in \mathbb{Z}[X]$ et p divise chacun des termes de la somme.

Exercice 34.
2) Appliquer le **1)** à $P(X+k)$.

Exercice 37.

$\begin{cases} P = a(X^2+1) + bX + c \\ Q = a'(X^2+1) + b'X + c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \cos\theta(X^2-1) + 2X\sin\theta \\ Q = \sin\theta(X^2-1) - 2X\cos\theta. \end{cases}$
$P \wedge Q = 1$ car $\pm i$ ne sont pas racines de P et Q.

Exercice 38.
$\deg P < 2 \Rightarrow P \in \{1, X, X+1\}$.

Exercice 39.
1) isomorphisme $P \longmapsto P(X) + P(X+1)$.
2) $P_n' = nP_{n-1}$.
3) $P_n(X+1) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k P_k$ (Taylor).
4) $Q_n(X) = P_n(1-X) \Rightarrow Q_n(X) + Q_n(X+1) = 2(-1)^n X^n$.

Exercice 40.
1) Bezout généralisé.
3) $\big((1-X)P' - nP\big)(1-X)^{n-1} + \big(nQ + XQ'\big)X^{n-1} = 0$.
4) $P^{(k+1)}(0) = (n+k)P^{(k)}(0) \Rightarrow P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^k X^k$.

Exercice 42.
$Q = P + P' + P'' + \dots$: $Q(x) - x \to \infty -> +\infty$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\alpha)$ soit minimal.
Alors $0 = Q'(\alpha) = Q(\alpha) - P(\alpha) \Rightarrow \min Q \geq 0$.

Exercice 43.
oui ssi P est pair.

Exercice 44.
1) $P_0(u) = 2$, $P_1(u) = u$, $P_{n+1}(u) = uP_n(u) - P_{n-1}(u)$.
2) $u_k = 2\cos\Big(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\Big)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Exercice 45.
1) a) $P_1 = 3X^2 - 1$
b) Non pour le premier qui se factorise en $P_1 = 3(X - \frac{-1}{\sqrt{3}})(X - \frac{1}{\sqrt{3}})$. Pour le second non plus car seuls les polynômes de degré 1 ou 2 avec des racines complexes conjuguées sont irréductibles.
2) a) Degré $2n$ et coeff dominant $a_{2n} = 2n+1$.
b) $P_n(i) = (-2)^n$.
c) Si z_0 est racine, alors $(z_0+i)^{2n+1} = (z_0-i)^{2n+1}$. Donc $|z_0+i| = |z_0-i|$, ce qui implique que $z_0 \in \mathbb{R}$. (Faire un dessin et pour la preuve, par l'absurde avec $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\theta \not\equiv 0\ (\pi)$)
d) $z_k(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1) = i(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1)$. Donc $z_k = \text{cotan}\,\frac{k\pi}{2n+1}$.
e) $Q_n = \sum\limits_{l=0}^{n} (-1)^{n-l}\binom{2n+1}{2l} X^l$.
f) Les racines sont les carrés de celles de P_n, i.e. $\text{cotan}^2\,\frac{k\pi}{2n+1}$. Il n'y en a bien que n car les racines de P_n sont opposées par paires.
3) On utilise les fonctions symétriques élémentaires : $S_n = \dfrac{-b_{n-1}}{b_n} = \binom{2n+1}{2n-2}\dfrac{1}{2n+1}$.

Exercice 46.
3) trivialement vrai ou trivialement faux selon le choix qu'on a fait en **1**.
4) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $F_Q = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}_n[X]\}$. On a $F_Q = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}[X]\}$ de manière évidente, donc F_Q est stable par la multiplication modulaire par X.

Soit réciproquement F un sev de $\mathbb{C}_n[X]$ stable par la multiplication modulaire par X. Si $(P_1,\dots,P_k)$ est une famille génératrice de F alors $Q = \mathrm{pgcd}(P_1,\dots,P_k) \in F$ d'après la relation de Bézout et la stabilité de F donc $F_Q \subset F$ et $P_i \in F_Q$ puisque Q divise P_i d'où $F \subset F_Q$ et $F = F_Q$.

Exercice 47.

Tout polynôme à coefficients complexes non constant est surjectif sur $\mathbb{C}$ donc $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad P = a$ (constante réelle).

On a par interpolation de Lagrange : $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \quad\Leftrightarrow\quad P \in \mathbb{Q}[X]$.

Montrons que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \quad\Leftrightarrow\quad P = aX + b$ avec $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}$: la condition est clairement suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire, considérons un polynôme éventuel P de degré $n \geq 2$ tel que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. On sait déjà que P est à coefficients rationnels, donc on peut l'écrire sous la forme : $P = \dfrac{a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n}{d}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Soit π un nombre premier ne divisant ni a_n ni d, et $x = p/q$ (forme irréductible) un rationnel tel que $P(x) = 1/\pi$. On a donc : $\pi(a_0q^n + \dots + a_np^n) = dq^n$ ce qui implique que π divise q. Il vient alors : $a_np^n = dq^n/\pi - a_0q^n - \dots - a_{n-1}qp^{n-1}$ ce qui est impossible puisque π est facteur du second membre ($n \geq 2$) mais pas du premier ($p \wedge q = 1$).

Exercice 48.

Clairement $E = \emptyset$ si les y_i ne sont pas distincts. Si $y_1,\dots,y_n$ sont distincts, soit $P \in E$, $n = \deg(P)$ et λ le coefficient dominant de P ($P \neq 0$ car les y_i ne sont pas tous nuls). Alors $P(X) - y_i$ a pour seule racine x_i donc $P(X) - y_i = \lambda(X - x_i)^n$. Pour $n = 1$ on obtient $P(X) = y_1 + \lambda(X - x_1)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \geq 2$ on obtient $y_2 - y_1 = \lambda(X - x_1)^n - \lambda(X - x_2)^n = n\lambda X^{n-1}(x_2 - x_1) + \dots$ ce qui est impossible donc $E = \emptyset$.

Exercice 49.

1) Récurrence sur $\mathrm{card}(S)$ en mettant le terme de plus bas degré en facteur et en dérivant le quotient.
2) Appliquer la question précédente aux suites $(\mathrm{Re}(a_s))$ et $(\mathrm{Im}(a_s))$.

Exercice 50.

Soit $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{100} \dfrac{k}{x-k}$. f est strictement décroissante de 0 à $-\infty$ sur $]-\infty, 0[$, de $+\infty$ à $-\infty$ sur chaque intervalle $]k, k+1[$, $1 \leq k \leq 100$ et de $+\infty$ à 0 sur $]100, +\infty[$. Donc il existe $1 < \alpha_1 < 2 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{99} < 100 < \alpha_{100}$ tels que $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) \geq 1\} = \bigcup\limits_{k=1}^{100}]k, \alpha_k]$.

La somme des longueurs est $L = \sum\limits_{k=1}^{100} \alpha_k - \sum\limits_{k=1}^{100} k$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_{100}$ sont les racines du polynôme :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{100}(X-k) - \sum_{k=1}^{100} k \prod_{i\neq k}(X-i) = X^{100} - 2X^{99}\sum_{k=1}^{100} k + \dots$$

D'où $\sum\limits_{k=1}^{100} \alpha_k = 2\sum\limits_{k=1}^{100} k$ et $L = \sum\limits_{k=1}^{100} k = 5050$.

Exercice 51.

Le sens $\Leftarrow$ est trivial. Pour le sens $\Rightarrow$, il suffit de vérifier la propriété lorsque P est irréductible, strictement positif sur $\mathbb{R}^+$, et le seul cas non trivial est celui où P est de la forme : $P = (X-a)^2 + b^2$ avec $a > 0$, $b > 0$. Dans ce cas, le coefficient de X^k dans $(X+1)^\ell P(X)$ est : $C_\ell^k(a^2+b^2) - 2aC_\ell^{k-1} + C_\ell^{k-2}$, en convenant que C_x^y vaut 0 si l'on n'a pas $0 \leq y \leq x$. En mettant ce qui peut l'être en facteur et en ordonnant le reste suivant les puissances de k, on est rammené à montrer que la quantité :

$$k^2(a^2+b^2+2a+1) - k((a^2+b^2)(2\ell+3) + 2a(\ell+2) + 1) + \ell^2(a^2+b^2)$$

est strictement positive pour tout $k \in [[0, \ell+2]]$ si ℓ est choisi convenablement. Or le discriminant par rapport à k est équivalent à $-4\ell^2(2a+1)$ lorsque ℓ tend vers $+\infty$ donc un tel choix de ℓ est possible.

Exercice 52.

On suppose E fini et on montre que P est constant : il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) \neq 0$. Soit $N = \prod_{p\in E} p^{1+v_p(P(a))}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(a+kN) \equiv P(a)\ [N]$ (formule de Taylor), donc $v_p(P(a+kN)) = v_p(P(a))$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $p \in E$. Comme $P(a+kN)$ est produit d'éléments de E, on en déduit que $P(a+kN) = \pm P(a)$ pour tout k, donc P prend une infinité de fois la même valeur.

Exercice 54.

Prendre pour P_n la partie régulière du développement limité à l'ordre n de $\sqrt{1+x}$.

Exercice 55.

Analyse : on pose $P_j = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et on considère la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{a_0}{X} + \frac{a_1}{X+1} + \dots + \frac{a_n}{X+n} = \frac{P(X)}{X(X+1)\dots(X+n)}.$$

Alors $\displaystyle\int_{t=0}^{1} t^i P_j(t)\,\mathrm{d}t = F(i+1) = \frac{i!\,P(i+1)}{(i+n+1)!}$ donc $P(j+1) = \dfrac{(j+n+1)!}{j!}$ et $P(k) = 0$ pour $k \in [[1, n+1]] \setminus \{j+1\}$, soit $P(X) = \dfrac{(j+n+1)!}{j!} \displaystyle\prod_{k\neq j+1} \frac{X-k}{j+1-k} = (-1)^{n-j}\frac{(j+n+1)!}{(j!)^2(n-j)!} \prod_{k\neq j+1}(X-k) = Q_j(X)$.

Synthèse : soit Q_j le polynôme ci-dessus et $a_0, \dots, a_n$ les coefficients de la décomposition en éléments simples de $\dfrac{Q_j(X)}{X(X+1)\dots(X+n)}$. On doit juste vérifier que les a_i sont entiers. Calcul :

$$a_i = \frac{Q_j(-i)}{(-1)^i i!\,(n-i)!} = (-1)^{i+j}\frac{(i+j)!\,(i+n+1)!\,(j+n+1)!}{(i+j+1)!\,(i!)^2\,(j!)^2\,(n-i)!\,(n-j)!} = (-1)^{i+j} C_{i+j}^{i} C_{i+n+1}^{i+j+1} C_{j+n+1}^{j} C_n^i (n+1) \in \mathbb{Z}.$$