#64

Sommes directes

Khôlles - Classes prépa — Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. *sev de $\mathbb{K}_3[x]$*

Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = \{P \in E \text{ tq } P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, et $H = \{P \in E \text{ tq } P(X) = P(-X)\}$.

1) Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = 0\}$.

2) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 2. *Caractérisation des sommes directes*

Soient F_1, F_2, F_3 trois sev de E. Montrer que $F_1+F_2+F_3$ est directe si et seulement si : $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0}\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{\overrightarrow{0}\}$.

Généraliser.

Exercice 3. *Somme directe dans $E \Rightarrow$ somme directe dans $\mathscr{L}E$*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ une base de E.

On note $F_i = \{u \in \mathscr{L}E \text{ tq } \operatorname{Im} u \subset \operatorname{vect}(\overrightarrow{e}_i)\}$.

1) Caractériser matriciellement les éléments de F_i.

2) Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n = \mathscr{L}E$.

Exercice 4. *Toute somme peut être rendue directe en réduisant les sev*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F_1, F_2, ..., F_n des sev de E tels que $F_1 + \cdots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sev $G_1 \subset F_1$, ..., $G_n \subset F_n$ tels que $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n = E$.

Exercice 5. *Somme et intersection*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \dots, E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$, F un autre sev de E, et $F_i = E_i \cap F$.

1) Montrer que la somme $G = F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

2) Comparer F et G.

Exercice 6. *Somme directe d'endomorphismes*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \dots, E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$. Soient $u_1 \in \mathscr{L}E_1, \dots, u_n \in \mathscr{L}E_n$.

1) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u \in \mathscr{L}E$ tel que pour tout i : $u_{|F_i} = u_i$.

2) Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(u_n)$ et $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(u_n)$.

Exercice 7. ♩

Montrer que $E = \{f \in \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{C}),\ \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 0\}$ et $F = \{f \in \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{C}),\ f \text{ constante}\}$ sont supplémentaires.

Exercice 8. *Somme de projecteurs*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs tels que : $\forall\ i, j,\ p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$, et $p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}_E$.

1) Montrer que $\operatorname{tr}(p_i) = \operatorname{rg}(p_i)$.

2) Montrer que $E = \operatorname{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(p_n)$.

Exercice 9. *Projecteurs*

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f_1, \dots, f_n$ n applications linéaires toutes non nulles. On suppose que : $\forall\ (i,j) \in [[1,n]]^2,\ f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i$. Montrer les f_i sont toutes de rang un.

Solutions des exercices

Exercice 9.

Les f_i sont des projecteurs commutant deux à deux, ils sont simmultanément diagonalisables. Soit e_1 tel que $f_1(e_1) = e_1$: $f_i(e_1) = f_i \circ f_1(e_1) = 0$ si $i \geq 2$ donc les supports des restrictions des f_i à une base propre commnue sont deux à deux disjoints non vides, ce sont des singletons.