#82

Espaces hermitiens

Khôlles - Classes prépa Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Soit E l'ensemble des suites (z_n) de complexes telles que la série $|z_n|^2$ soit convergente.

1) Montrer que E est un espace vectoriel.

2) On pose $<(z_n),(z'_n)>=\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\overline{z'_n}$.

E muni de cette forme est-il un espace hermitien ?

3) Soit $\begin{array}{cccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & (z_n) & \longmapsto & (\frac{z_n}{n}) \end{array}$.

a) Est-ce un endomorphisme auto-adjoint ?

b) Est-ce un automorphisme de E ?

Exercice 2. *Somme directe orthogonale*

Soit E un espace préhilbertien et $F_1,\dots,F_n$ des sev tels que pour $i\neq j$, $F_i\perp F_j$. Montrer que la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe.

Exercice 3. *Espace ℓ^2*

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

Pour $u,v\in E$, on pose : $(u\mid v)=\sum_{n=0}^{\infty} u_nv_n$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $(u\mid v)$ existe.

3) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

4) Montrer que E, muni de la norme associée, est complet.

Exercice 4. *(Mines-Ponts 71-72)*

Soit E l'ensemble des suites (x_n) de complexes telles que la série (x_n^2) soit convergente.

1) Montrer que E est un espace vectoriel.

2) On pose $<(x_n),(y_n)>=\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\bar{y_n}$. L'espace E muni de cette forme est-il un espace hermitien ?

3) Soit $f:E\longrightarrow E$ qui a (x_n) associe $(\frac{x_n}{n})$. Est-ce un endomorphisme auto adjoint (i.e. $<(x_n,f((y_n))>=<f((x_n)),(y_n)>$?

Est-ce un automorphisme de E ?

Exercice 5. $f(x)\perp x\Rightarrow f=0$

Soit E un espace vectoriel préhilbertien complexe et $f\in\mathscr{L}E$ tel que pour tout vecteur $\overrightarrow{x}\in E$, on a $f(\overrightarrow{x})\perp\overrightarrow{x}$.

1) Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in E$, on a $(f(\overrightarrow{x})\mid\overrightarrow{y})=0$.

2) Montrer que $f=0$.

3) Comparer avec le cas réel.

Exercice 6. *Hanh-Banach pour une boule*

Soit E un espace préhilbertien réel et B une boule ouverte de E ne contenant pas $\overrightarrow{0}$. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f\in E^*$ telle que : $\forall\ \overrightarrow{x}\in B,\ f(\overrightarrow{x})>0$.

Exercice 7. *Calcul de minimums*

Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & \displaystyle\int_{x=0}^{\pi} (\sin x - ax^2 - bx)^2 \,\mathrm{d}x. \end{array}$

Exercice 8. *Calcul de minimums*

1) Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \displaystyle\int_{t=0}^{1} (1+tx_1+\dots+t^n x_n)^2 \,\mathrm{d}t$. Montrer que φ admet un minimum absolu et le calculer lorsque $n=3$.

2) Même question avec $\psi(x_1,\dots,x_n) = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}(1+tx_1+\dots+t^n x_n)^2 \,\mathrm{d}t$.

Exercice 9. *Trouvez le produit scalaire*

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degrés étagés ($\deg P_n = n$). Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille P_n est orthonormée.

Exercice 10. *Décomposition de Cholesky*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

1) Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$. Montrer que T est unique si on impose la condition : $\forall\ i,\ T_{ii} > 0$.

2) Application : Montrer que $\det A \le \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exercice 11. *Changement de base unitaire*

Soit E un ev hermitien et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Montrer que ${}^t\overline{P}P = I$. Que peut-on dire de $\det P$?

Exercice 12. *Déterminant de Gram*

Soit E un espace préhilbertien et $\overrightarrow{u}_1,\dots,\overrightarrow{u}_n \in E$. On note $G = (g_{ij}) \in \mathscr{M}_n()K$ la matrice de Gram de ces vecteurs ($g_{ij} = (\overrightarrow{u}_i \mid \overrightarrow{u}_j)$).

1) On suppose E de dimension finie, rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1,\dots,\overrightarrow{e}_p)$. Exprimer G en fonction de $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}_1,\dots,\overrightarrow{u}_n)$.

2) En déduire que $\det(G)$ est un réel positif ou nul, et nul si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}_i$ sont liés.

3) Montrer le même résultat sans supposer que E est de dimension finie.

4) Examiner le cas particulier $n=2$.

5) Application : Le tétraèdre $ABCD$ est tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \dfrac{\pi}{4}$, $(AB, AD) \equiv \dfrac{\pi}{3}$, $(AC, AD) \equiv \dfrac{\pi}{2}$. Calculer son volume.

Exercice 13. *Congruence des matrices de Gram*

Soit E un ev hermitien et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases quelconques. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et G, G' les matrices de Gram de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?

Exercice 14. *Normes euclidiennes*

1) Montrer que les applications : $\begin{array}{rccc} N_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+xy+y^2} \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} N_2: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sqrt{2x^2-xy+y^2} \end{array}$ sont des normes.

2) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que : $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha N_2(x,y) \le N_1(x,y) \le \beta N_2(x,y)$.

3) Trouver les meilleures constantes α, β (étudier si $N_1(x,y)^2 - \lambda N_2(x,y)^2$ est positive, négative).

Exercice 15. *Famille duale de* $1, X, X^2, \dots$

1) Montrer qu'il existe des polynômes $P_0,\dots,P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que : $\forall\ i,j \le n$, $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^i P_j(t) \,\mathrm{d}t = \delta_{ij}$.

2) Montrer qu'il n'existe pas de suite de polynômes $(P_0, \dots, P_n, \dots)$ telle que : $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^i P_j(t)\,\mathrm{d}t = \delta_{ij}$.

Exercice 16. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E l'ensemble des fonctions : $[a,b] > \mathbb{R}^{+*}$ continues et $\begin{array}{rccc} \Phi: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f \times \int_a^b 1/f. \end{array}$

Montrer que $\min\limits_{f\in E} \Phi(f) = (b-a)^2$ et chercher les fonctions réalisant le minimum.

Exercice 17. *Intégrale double*

Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace E des fonctions $f : D > \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ nulles sur le bord, C, de D.

Pour $f, g \in E$, on pose $(f \mid g) = \displaystyle\iint_D \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Montrer que c'est un produit scalaire.

Exercice 18. *Forme quadratique associée à la matrice de Gram*

Soit E un espace euclidien, $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ une base de E, G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.
Montrer que : $\forall\ \overrightarrow{x} \in E$, $\sum\limits_{i,j} a_{ij}(\overrightarrow{e}_i \mid \overrightarrow{x})(\overrightarrow{e}_j \mid \overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\|^2$.

Exercice 19. *Orthogonal de* $\mathbb{R}[X]$

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, F le sev des fonctions polynomiales et g la fonction exponentielle sur $[0,1]$.

1) Montrer que $g \notin F$.
2) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales convergeant vers g pour la norme euclidienne.
3) En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 20. *Orthogonal d'un hyperplan*

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et, pour $f \in E$: $\varphi(f) = \displaystyle\int_{t=0}^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que φ est continue.
2) Montrer que $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est fermé.
3) Montrer que $H^\perp = \{0\}$.

Exercice 21. *Produit scalaire*

Soit $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose pour $f, g \in E$: $(f \mid g) = \displaystyle\int_{t=a}^{b} u(t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1) A quelle condition sur u définit-on ainsi un produit scalaire ?
2) Soient u, v deux fonctions convenables. A quelle condition les normes associées sont-elles équivalentes ?

Exercice 22. *Produit scalaire ?*

Soit $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et (a_n) une suite d'éléments de $[a,b]$.

Pour $f, g \in E$, on pose : $(f \mid g) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(a_n)g(a_n)}{2^n}$.

1) A quelle condition sur la suite (a_n) définit-on un produit scalaire ?
2) Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux telles suites telles que les ensembles $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts. Montrer que les normes correspondantes sont non équivalentes.
3) Question ouverte : à quelle condition les normes associées à deux suites (a_n) et (b_n) sont-elles équivalentes ?

4) Montrer qu'il n'existe pas de suite (a_n) pour laquelle E soit complet.

Exercice 23. *Ulm MP* 2000*

V est un espace hermitien et u, v, w trois vecteurs unitaires. Montrer que :

$$\sqrt{1-|(u \mid v)|^2} \leq \sqrt{1-|(u \mid w)|^2}+\sqrt{1-|(v \mid w)|^2}.$$

Exercice 24. *Ulm MP* 2000*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elle admet une décomposition $A = UT\,{}^tU$ avec U unitaire et T triangulaire supérieure si et seulement si le spectre de $A\overline{A}$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) Trivial, l'inégalité triangulaire fournissant la convergence.

2) La forme a un sens car $|z_n\overline{z'_n}| \leq \frac{1}{2}(|z_n|^2 + |z'_n|^2)$. Donc $(z_n\overline{z'_n})$ converge.

Il faut maintenant que la forme soit sesquilinéaire et autoadjointe (trivial car $< (z_n),(z'_n) >= \overline{< (z'_n),(z_n) >}$), définie ($< (z_n),(z_n) >= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n\overline{z_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |z_n|^2 = 0 \ \Rightarrow \ (z_n) = (0)$) et positive (évident).

3) **a)** On vérifie qu'il est autoadjoint : $< (x_n),(f(y_n)) >= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n \frac{\overline{z'_n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z_n}{n}\overline{z'_n} =< (f(z_n)),(z'_n) >$.

b) Ce ne peut être un automorphisme car il n'est pas surjectif.

Exercice 4.

1) La suite nulle est dans E et la stabilité multiplicative n'est pas un problème. Reste la stabilité additive. Le théorème de la médiane donne $||x-y||^2 + ||x+y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$. Donc $|x_n + y_n|^2 \leq |x_n|^2 + |y_n|^2$.

2) On vérifie que l'expression de cette forme a un sens. La convergence est assurée par $|x_n\bar{y_n}| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ donc $(x_n\bar{y_n})$ converge.

Il faut maintenant montrer que la forme est sesquilinéaire, autoadjointe définie positive.

Elle est trivialement sesquilinéaire et autoadjointe car $< (x_n),(y_n) >= \overline{< (y_n),(x_n) >}$.

Si $< (x_n),(x_n) >= 0$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = 0 \ \Rightarrow \ (x_n) = (0)$ et la forme est définie positive.

3) f est clairement un endomorphisme et $< (x_n),(f(y_n)) >= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n \frac{\bar{y_n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}\bar{y_n} =< (f(x_n)),(y_n) >$. Il est donc autoadjoint.

Mais il ne peut être un automorphisme de E car il n'est pas surjectif.

Exercice 5.

1) $(f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y}) = -(f(\overrightarrow{y}) \mid \overrightarrow{x})$ et $(f(i\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y}) = -(f(\overrightarrow{y}) \mid i\overrightarrow{x})$.

Exercice 7.

$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5}$, $b = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2}$, $m = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$.

Exercice 8.

1) $\frac{1}{16}$.

2) $\frac{1}{4}$.

Exercice 12.

5) $\frac{1}{12}$.

Exercice 14.

3) $\alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{7}}}$, $\beta = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{7}}}$.

Exercice 15.

2) Soit $P_0 = Q'_0$. Par IPP on obtient Q_0 est orthogonal à la famille $(jX^{j-1} - X^j)_{j\geq 1}$ qui est une base de $\mathbb{R}[X]$ donc $Q_0 = 0 = P_0$ et $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}t^0 P_0(t)\,\mathrm{d}t \neq \delta_{0,0}$.

Exercice 16.
$f =$ cste.

Exercice 18.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $(\overrightarrow{e}_i)$.
Le premier membre vaut ${}^tXPG^{-1t}PX = {}^tXX$.

Exercice 20.
3) Soit $g \in H^\perp$ non nulle. Les formes linéaires : $f \longmapsto \int_0^{1/2} f$ et $f \longmapsto \int_0^1 fg$ sont nulles sur H, donc proportionnelles, ce qui est impossible pour g continue.

Exercice 21.
1) $u \geq 0$ et $u^{-1}(0)$ est d'intérieur vide.
2) Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha u \leq v \leq \beta u$.

Exercice 22.
1) (a_n) est partout dense.
4) Si les a_n sont distincts, on choisit pour tout n une fonction f_n comprise entre 0 et 1 valant alternativement 1 et -1 en $a_0, \dots, a_n$. Alors la suite (f_n) est de Cauchy mais ne converge pas car si $f_n > f$ alors $f^2 \equiv 1$, absurde.

Exercice 23.
$\sqrt{1 - |(u \mid v)|^2} = d(v, \mathbb{C}u) \leq d(v, \mathbb{C}w) + |(v \mid w)| d(w, \mathbb{C}u)$.

Exercice 24.
1) $A = UT\,{}^tU \Rightarrow A\overline{A} = UT\overline{T}\,{}^t\overline{U}$ est semblable à $T\overline{T}$.
2) $A\overline{A}$ est à valeurs propres positives distinctes. Soit U unitaire trigonalisant $A\overline{A}$ et $T = U^{-1}A\,{}^tU^{-1}$. Donc $T\overline{T}$ est triangulaire supérieure à valeurs propres réelles distinctes. On montre que ceci implique T triangulaire supérieure par récurrence sur n.

$$T = \begin{pmatrix} t & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \Rightarrow T\overline{T} = \begin{pmatrix} |t|^2 + X\overline{Y} & t\overline{X} + X\overline{Z} \\ \overline{t}Y + Z\overline{Y} & Y\overline{X} + Z\overline{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{réel} & * \\ 0 & \text{tr.sup à vp réelles} \end{pmatrix}.$$

Donc $X\overline{Y} = \overline{X}Y$ et $Z\overline{Y} = -\overline{t}Y$, d'où $(Y\overline{X} - X\overline{Y}I)Y = 0 = (Z\overline{Z} - |t|^2 I)Y$.
Par hypothèse $Y\overline{X} + Z\overline{Z} - (|t|^2 + X\overline{Y})I$ est inversible donc $Y = 0$ et on est ramené au cas $n - 1$.
3) $A\overline{A}$ est à valeurs propres positives : ? ? ?

Solution de Pierre Février (MP* Neuilly sur Seine) :

lemme : Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(A\overline{A})$ alors il existe $W \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $A\overline{W} = \alpha W$ et $\alpha^2 = \lambda$.

Soit $V \in E_\lambda(A\overline{A})$, $V \neq 0$. Si $A\overline{V} = -\sqrt{\lambda}\,V$ on a le résultat voulu, sinon on pose $W = A\overline{V} + \sqrt{\lambda}\,V$. On a alors :

$$\overline{A}W = \overline{A}A\overline{V} + \sqrt{\lambda}\,\overline{A}V = \lambda\overline{V} + \sqrt{\lambda}\,\overline{A}V = \sqrt{\lambda}\,\overline{W}$$

On peut s'arranger pour que le vecteur précédent soit unitaire et construire U matrice unitaire de première colonne W.

On a alors ${}^t\overline{U}A\overline{U} = \begin{pmatrix} \alpha & x & x & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, puis ${}^t\overline{U}A\overline{A}U = \begin{pmatrix} \alpha^2 & y & y & y \\ 0 & & & \\ \vdots & & B\overline{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. On en déduit le résultat par récurrence.