

Exercice 1. ♪

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ sur $]0, 1[$. Etudier la continuité et la dérivabilité de f et un éventuel prolongement aux bornes.

Exercice 2. ♪

Soit $f : x \mapsto (\ln x)\sqrt{|x-1|}$. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]0, +\infty[$. La fonction f est-elle deux fois dérivable sur I ?

Exercice 3. ♪

Etudier la continuité et la dérivabilité de $f : x \mapsto e^{\frac{x}{\sin x}}$. Peut-on prolonger f par continuité ?

Exercice 4. ♪ (*Mines-Ponts '71*)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, $f''(x) \geq 0$ et f non constante. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 5. (*Mines-Ponts 71-72*)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On pose $F(x) = \int_a^b f(x+t)\varphi(t)dt$.

Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 6. (*Mines-Ponts 71-72*)

Soit P un polynôme à coefficients réels qui a toutes ses racines réelles distinctes. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Montrer que $(P^2 + \alpha^2)$ a toutes ses racines distinctes.

Exercice 7. ♪

Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$.

Exercice 8. ♪

Calculer la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto x^n \ln x$.

Exercice 9. ♪

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f(1) = 0$ et vérifiant $\forall x \in]0, 1[, f(x) \neq 0$. Montrer que $f'(0)f'(1) \leq 0$.

Exercice 10. ♪ (*Mines-Ponts '71*)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie continue dans un voisinage de x_0 .

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en x_0 est que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+, k \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - k)}{h + k} \text{ existe.}$$

Exercice 11. ♪ *Fonction continue mais dérivable nulle part - Van der Waerden, 1930.*

On considère $\Delta(x)$ la distance de x à l'entier le plus proche.

- 1) Montrer que Δ est continue mais non dérivable en tout entier relatif.
- 2) Où la fonction $x \mapsto \Delta(2^n x)$ est-elle dérivable?
- 3) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Delta(2^n x)$. Déterminer les a_n pour que f réponde à la question.

Exercice 12. ♣ (Mines-Ponts '71)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 et vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$ où $\varphi(x) = \frac{1}{x}(f(2x) - f(x))$.
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 13.

Soit $a > 0$ et f une fonction réelle continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a]$.

On suppose

$$f(0) = 0 \text{ et } f(a)f'(a) < 0$$

Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 14. ♣

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

On définit une fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ f(2x - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

A quelle condition(s) la fonction g est-elle dérivable?

Exercice 15. *Limite double*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0, et $f'(0) = \ell$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall h, k \in]0, \delta[, \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h + k} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 16. *Propriétés de parité et de périodicité*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

- 1) Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire? impaire? périodique?
- 2) Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire? impaire? périodique?
- 3) Montrer que si f' est T -périodique et $f(T) \neq f(0)$, alors f n'a pas de période (on étudiera $f(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 17. *Propriété de parité*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que la fonction $t \mapsto 2f(t) - tf'(t)$ est paire. f est-elle paire?

Exercice 18. *Injectivité locale*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

- 1) Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V \setminus \{a\}, f(x) \neq f(a)$.
- 2) Si f' est continue au point a , montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f|_V$ soit injective.

Exercice 19. *Dérivabilité de $|f|$*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $|f|$ admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Exercice 20. $f'(x) > \ell$ et f est bornée

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x) - x \rightarrow +\infty - > \ell$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 21. $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow{+\infty} \ell$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{+\infty} \ell$.

Chercher un contreexemple pour la réciproque.

Exercice 22. ♪

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(a) = f'(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Interpréter géométriquement cette égalité.

Exercice 23. ♪

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f^{(3)}(a) = -12$.

Exercice 24. ♪

Soit f une fonction deux fois dérivables sur un intervalle I . Démontrer que pour $a \in I$ et tout réel h tel que $a + 2h \in I$, il existe $c \in]a, a + 2h[$ tel que $f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c)$.

Exercice 25. ♪

Démontrer que si f est une fonction trois fois dérivable au voisinage d'un point a , alors pour tout h suffisamment petit, il existe $c \in]0, h[$ tel que :

$$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} = f'(a) + \frac{h^2}{12}(f'''(a + c) + f'''(a - c)).$$

Exercice 26. ♪

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . Démontrer que pour $a \in I$ et tout réel h tel que $a + 2h \in I$, il existe $c \in]a, a + 2h[$ tel que $f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c)$.

Exercice 27. ♪

Etudier, suivant $n \in \mathbb{N}$, le nombre de racines réelles du polynôme $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$.

Exercice 28. ♪

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{-1}{|x|}}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29. ♪

Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que les limites de f et f' existent en $+\infty$ et valent ℓ et ℓ' . Montrer que $\ell' = 0$.

1) Si une fonction g vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$, alors g possède-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?

2) Si g possède une limite en $+\infty$, alors g' possède-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?

Exercice 30. ♪

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$. Démontrer que f' n'est pas bornée sur $[a, b]$.

A-t-on nécessairement $\lim_{x \rightarrow b} f'(x) = +\infty$?

Exercice 31. ♣

Trouver une équation différentielle vérifiée par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; en déduire que $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ où P_n est un polynôme, ainsi qu'une relation de récurrence entre trois polynômes consécutifs.

Exercice 32. ♣

Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $f'(0) \leq 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) + f'(x) \geq 0$. Démontrer que f a un signe constant.

Exercice 33. ♣

On suppose que f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I avec $\forall x \in I, f(x)f''(x) = 0$. Démontrer que f est une fonction affine.

Exercice 34. ♣

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) \neq 0$. La fonction f est-elle monotone au voisinage de x_0 ?

Exercice 35. *Propriété des valeurs intermédiaires pour f'*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1) On suppose que : $\forall x \in [a, b], f'(x) \neq 0$. Montrer que f' est de signe constant.

2) Dans le cas général, montrer que $f'([a, b])$ est un intervalle.

Exercice 36. *Propriété des valeurs intermédiaires pour f'*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1) On note $E = \{(x, y) \in [a, b]^2 \text{ tq } x < y\}$ et pour $(x, y) \in E : \varphi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Montrer que $\varphi(E)$ est un intervalle.

2) En déduire que $f'([a, b])$ est un intervalle.

Exercice 37. ♣ (*Mines-Ponts '71*) *Théorème de Darboux*

Soit f une fonction dérivable sur le segment $[a, b]$. Montrer que la dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 38. ♣ *Théorème de Darboux - variante*

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

En déduire que f' , non nécessairement continue, possède la propriété des valeurs intermédiaires.

Exercice 39. ♣

Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $f(0) = 0$.

1) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n^2}\right)$.

2) Application : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + 1)(n^2 + 2) \dots (n^2 + n)}{2^{2n}}$.

Exercice 40. ♣ *Règle de l'Hospital*

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables avec : $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

- 2) En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$, alors $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ (règle de l'Hospital).
- 3) Application : déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 41. Recherche de limite

Trouver $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}$.

Exercice 42. $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0 \Rightarrow$ il existe un autre zéro

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$, et $f'(c) \leq 0$.

Exercice 43. $f'(a) = f'(b)$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Exercice 44. ♣

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda(x) = \lambda e^x + x^2$.

1) Trouver le lieu des points d'inflexion de f_λ .

2) Trouver le lieu des extrema relatifs de f_λ .

Exercice 45. Tangentes passant par un point donné

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, il existe une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point $(d, 0)$.

Exercice 46. ♣ *Rolle itéré*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable.

1) Si f s'annule en $n+1$ points distincts dans $[a, b]$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

2) Si $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 47. Rolle à l'infini

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(a)$. Montrer qu'il existe $x \in]a, +\infty[$ tel que $f'(x) = 0$.

Exercice 48.

Si f est $\mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$, et s'annule en $n+1$ réels sur $]a, b[$, alors montrer qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 49.

Soit P un polynôme à coefficients réels scindés sur $\mathbb{R}$. Montrer que si les racines de P sont simples alors le polynôme P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 50.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $x_0 \in [a, b]$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente au graphe en $(c, f(c))$ passe par $(x_0, 0)$.

2) Même question avec $f'(a) = 0$ pour $x_0 = a$.

Exercice 51.

On pose $f(x) = [(x-a)(x-b)]^n$.

1) Déterminer la dérivée n^e de f .

2) En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 52.

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels tels que $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ et $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 53.

Soit $f : x \mapsto \ln(\ln x)$. Appliquer le T.A.F. à f sur $[n, n+1]$ afin d'étudier la suite (u_n) telle que $u_n = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n}$.

Exercice 54. *Formule des accroissements finis avec $\theta = 1/2$*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

Exercice 55. ♪

Démontrer que pour tout $(x, y) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2$, on a $|\ln(\tan x) - \ln(\tan y)| \geq 2|x - y|$.

Exercice 56. ♪

Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $\forall x \in [0, +\infty[$, on a $0 < f(x) \leq f'(x)$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle?

Exercice 57. *Fonction $\mathcal{C}^\infty$ bornée*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ bornée.

1) Montrer que si une dérivée, $f^{(k)}$, $k \geq 2$, admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes, $f^{(p)}$, $1 \leq p < k$, tendent vers 0 en $\pm\infty$.

2) En déduire que pour tout $k \geq 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 58. *Distance à la corde*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1) On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

(Considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$)

2) Cas général : Soit $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Exercice 59. *Écart à un polynôme interpolateur*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $a_1, \dots, a_n$ n points distincts dans $\mathbb{R}$, et P le polynôme de Lagrange prenant les mêmes valeurs que f aux points a_i . On pose $Q(x) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (x - a_i)$.

Montrer que : $\forall b \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$ tq $f(b) = P(b) + Q(b)f^{(n)}(c)$

(considérer $g(t) = f(t) - P(t) - \lambda Q(t)$ où λ est choisi de sorte que $g(b) = 0$).

Exercice 60. *Polynômes de Legendre*

On pose $f(t) = (t^2 - 1)^n$.

1) Montrer que : $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.

2) Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.

3) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $] -1, 1[$.

Exercice 61. *Racines de $x^n + ax + b$*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ ne peut avoir plus de deux racines réelles distinctes si n est pair, et plus de trois racines réelles distinctes si n est impair.

Exercice 62. *Racines de $P(x) - e^x$*

Soit P un polynôme. Montrer qu'il existe au plus un nombre fini de réels x tels que $P(x) = e^x$.

Exercice 63. *Limite de $1/(n+1) + \dots + 1/2n$*

On veut calculer $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$.

1) Montrer l'existence de ℓ .

2) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que $f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2n}\right) - n \rightarrow \infty - > \ell f'(0)$.

3) On prend $f(x) = \ln(1+x)$. Déterminer ℓ .

Exercice 64. *Calcul de limite*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Chercher $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 65. *Somme $1/k \ln k$*

Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, appliquer le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \ln(\ln x)$ sur $[k, k+1]$. En déduire que la série de terme général $\frac{1}{k \ln k}$ est divergente.

Exercice 66. $f'(x)f'(f(x)) = 1$

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f'(f(x)) = 1 \\ f(0) = 0 \text{ et } f'(0) > 0. \end{cases}$

Exercice 67. $f \circ f = f$

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dérivable telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est constante ou bien $f = \text{id}_{[0,1]}$.

Exercice 68. *Dérivabilité uniforme*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x, y \in [a, b], \text{ si } 0 < |x - y| < \delta, \text{ alors } \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 69. *Formes indéterminées*

Soient $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, u(x) \neq v(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} v(x) = a > 0. \end{cases}$

1) Chercher $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u^v - v^v}{u - v}$.

2) Chercher $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u^v - v^u}{u^u - v^v}$.

Exercice 70. $(1+k)(1+k^2) \dots (1+k^n)$

1) Montrer que : $\forall x \geq -1, \ln(1+x) \leq x$.

2) Soit $k \in]-1, 1[$. On pose $u_n = (1+k)(1+k^2) \dots (1+k^n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente (traiter séparément les cas $k \geq 0, k < 0$).

Exercice 71. Dérivée n -ème de $\cos^3 x$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

Exercice 72. Dérivée n -ème de $\arctan x$ et e^{x^3}

Établir une formule de récurrence pour les dérivées successives des fonctions :

$f : x \mapsto \arctan x$ et $g : x \mapsto e^{x^3}$.

Exercice 73. Dérivée n -ème de $(x^3 + 2x^2 - 5)e^{-x}$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto (x^3 + 2x^2 - 5)e^{-x}$.

Exercice 74. Ensi Chimie P 94

Soit $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 75. Dérivée n -ème de $x^n(1-x)^n$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^n(1-x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$.

Exercice 76. Dérivées n -èmes de $t^{n-1} \ln(t)$ et $t^{n-1} e^{1/t}$

Calculer $\frac{d^n}{dt^n} (t^{n-1} \ln t)$, et $\frac{d^n}{dt^n} (t^{n-1} \exp(1/t))$ (essayer $n = 1, 2, 3$).

Exercice 77. Dérivée n -ème de $f(x^2)$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. On pose $g(x) = f(x^2)$.

1) Montrer qu'il existe des entiers $a_{n,k}$ tels que : $\forall x, g^{(n)}(x) = \sum_{k=[(n+1)/2]}^n a_{n,k} f^{(k)}(x^2) (2x)^{2k-n}$.

2) Calculer $a_{n,k}$ en fonction de n et k .

Exercice 78. Dérivée n -ème de $f(1/x)$

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I ne contenant pas 0, et $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Établir : $g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-p)}{x^{2n-p}} C_n^p f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 79. Dérivées de e^{-1/x^2}

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x \neq 0 & \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ 0 & 0 \end{cases}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et : $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0$.

Exercice 80. $(f(2t) - f(t))/at$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\frac{f(2t) - f(t)}{t} - t \rightarrow 0- > a$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = a$.

Exercice 81. $\sin x - 3x/\pi + 4x^3/\pi^3 \geq 0$

On pose $f(x) = \sin x - \frac{3x}{\pi} + \frac{4x^3}{\pi^3}$. Montrer que : $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$ (chercher le signe de $f^{(4)}$).

Exercice 82. Courbes homothétiques

Soit $a > 0$, $a \neq 1$. On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation : $y = \ln x$, et $\mathcal{C}'$ celle d'équation : $y = a \ln x$.

- 1) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont une et une seule tangente commune.
- 2) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont homothétiques.

Exercice 83. *Matexo*

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f'(x) \geq 0$. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle.

Exercice 84. *Mines MP 2000*

Montrer que pour tout x réel, il existe $a(x)$ unique tel que $\int_{t=x}^{a(x)} e^{t^2} dt = 1$. Montrez que a est indéfiniment dérivable, et que son graphe est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice.

Exercice 85. $\varphi(2x) = 2\varphi(x)$ (*Centrale MP 2003*)

Trouver toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(2x) = 2\varphi(x)$.

Exercice 86. $f' = f^{-1}$ (*Ens Cachan MP* 2003*)

On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ bijectives de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ telles que $f' = f^{-1}$.

- 1) Trouver un élément de E du type $x \mapsto cx^m$, où c et m sont réels.
- 2) Quelle est la limite en 0 de f ?
- 3) Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
- 4) Montrer que f admet un unique point fixe.
- 5) Soit g un deuxième élément de E . Montrer que g admet le même point fixe que f .

