#137

Formes différentielles

Exercice 1.

On considère la forme différentielle $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, définie sur le demi-plan $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$.
Montrer que ω est exacte. Chercher ses primitives sur U.

Exercice 2.

On considère la forme différentielle de degré 1 définie par

$$\omega = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$$

sur $U = \{(x,y) \in R^2,\ y > 0\}$.

1) Montrer que ω est fermée sur U.
2) Montrer de deux façons différentes que ω est exacte.
3) Calculer $\displaystyle\int_C \omega$ où (C) est une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'origine $A(1,2)$ et d'extrémité $B(3,8)$.

Exercice 3.

Soit ω la forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$. Montrer que ω est une forme différentielles exacte sur $\mathbb{R}^2$. En déduire l'intégrale curviligne le long du demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$ de $A(1,2)$ vers $B(3,4)$.

Exercice 4. *Intégration d'une forme différentielle le long d'une cardioïde*

Soit $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy$. Calculer l'intégrale curviligne le long de la demi-cardioïde d'équation en polaire $r = 1 + \cos\theta$, avec θ allant de 0 à π.

Exercice 5.

1) Trouver une application $\phi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifiant $\phi(0) = 0$ telle que la forme différentielle ω suivante soit exacte sur $\mathbb{R}^2$:

$$\omega(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}dx + \phi(x)dy.$$

2) Donner alors une primitive de ω.
3) En déduire $\displaystyle\int_C \omega$ pour l'ellipse d'équation $3x^2 = -7y^2 + 21$, orientée dans le sens direct.

Exercice 6.

On considère ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega = (x^2 + y^2 - a^2)dx - 2aydy,$$

où a est un nombre réel non nul.

1) Prouver que la forme différentielle n'est pas exacte.
2) Soit f une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\alpha(x,y) = f(x)\omega(x,y)$. Quelle condition doit vérifier la fonction f pour que la forme différentielle α soit exacte ? Cette condition est-elle suffisante ? Déterminer une fonction f vérifiant la condition précédente.
3) Calculer une primitive de α sur $\mathbb{R}^2$.
4) Soit Γ le cercle de rayon R et de centre $(0,0)$. Déterminer $\displaystyle\int_C \alpha$.

Exercice 7.

Soit ω la forme différentielle

$$\omega = (3x^2y + z^3)dx + (3y^2z + x^3)dy + (3xz^2 + y^3)dz.$$

Cette forme admet-elle des primitives sur $\mathbb{R}^3$? Si oui, les déterminer.

Exercice 8.

Calculer l'intégrale curviligne $\omega = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ le long du cercle C de l'espace d'équation $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

Intégrales curvilignes

Exercice 9.

Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma y^2dx + x^2dy$ lorsque

1) La courbe γ a pour équation $x^2+y^2-ay=0$ orientée dans le sens trigonométrique.

2) La courbe γ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 2\dfrac{x}{a} - 2\dfrac{y}{b} = 0$ orienté dans le sens trigonométrique.

Exercice 10.

Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_C \omega$ où ω est la forme différentielle définie par

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2},$$

et C est le carré de sommets consécutifs $A(a,a)$, $B(-a,a)$, $C(-a,-a)$ et $D(a,-a)$. En déduire que la forme différentielle n'est pas exacte.

Exercice 11.

Calculer les intégrales curvilignes $\displaystyle\int_C \omega$ dans les cas suivants :

1) $\omega = xydx + (x+y)dy$ et C est l'arc de parabole $y=x^2$ avec $-1 \leq x \leq 2$ parcouru dans le sens direct.

2) $\omega = y\sin x dx + x\cos y dy$ et C est le segment de droite (OA) de $O(0,0)$ vers $A(1,1)$.

Exercice 12.

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dy$ le long du carré $ABCD$, avec $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(1,-1)$ parcouru dans le sens direct.

Exercice 13.

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = x^2dx - xydy$ le long des contours suivants :

1) Le segment de droite $[OB]$ de $O(0,0)$ vers $B(1,1)$.

2) L'arc de parabole d'équation $x=y^2$ avec $0 \leq x \leq 1$ orienté dans le sens des x croissants.

3) Que peut-on en déduire pour la forme différentielle ω ? Retrouver cela par une autre méthode.

Exercice 14.

On considère l'arc Γ, arc d'hélice paramétré et orienté par $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ et $z = ht$, pour t variant de 0 à 2π.

Calculer $I = \displaystyle\int_\Gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$

Exercice 15.

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = ydx + 2xdy$ sur le contour du domaine défini par $\begin{cases} x^2+y^2-2x \leq 0 \\ x^2+y^2-2y \leq 0 \end{cases}$ parcouru une fois en sens direct.

Exercice 16.
Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy$ le long de la demi-cardioïde C d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$ avec $a > 0$ fixé, θ variant de 0 à π.

Exercice 17.
Calculer $\int_\gamma zdx + xdy + ydz$ où γ est le cercle défini par $x+z=1$, $x^2+y^2+z^2=1$ avec une orientation que l'on choisira.

Circulation d'un champ de vecteurs

Exercice 18.
Soit $V(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ un champ de vecteurs. Calculer sa circulation le long du cercle de centre O et de rayon R. En déduire que ce champ de vecteurs ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 19.
Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé et $\overrightarrow{F}$ le champ de vecteurs : $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+z)\overrightarrow{i} - 3xy\overrightarrow{j} + x^2\overrightarrow{k}$.

Calculer la circulation de ce champ de vecteurs entre les points $O(0,0,0)$ et $P(1,2,-1)$ le long des chemins suivants :

1) $\Gamma :\ (x=t^2, y=2t, z=-t)$.
2) Le segment $[OP]$.
3) Le champ de vecteurs dérive-t-il d'un potentiel ?

Exercice 20.
Calculer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ le long de la courbe C dans les cas suivants :

1) $\overrightarrow{F} = (-y, x)$ et C est la demi-ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ avec $t \in [0,\pi]$ parcouru dans le sens direct.
2) $\overrightarrow{F} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2+1}, \dfrac{y}{x^2+y^2+1}\right)$ et C est le cercle d'équation $x^2+y^2-2x=1$, parcouru dans le sens direct.
3) $\overrightarrow{F} = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2-2z)$ et C est la courbe définie par $x=\cos t$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$, et $z = \frac{1}{2}\sin t$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

Formule de Green-Riemann

Exercice 21.
En utilisant la formule de Green-Rieman, calculer

$$\int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy$$

où γ est le bord orienté du domaine délimité par les courbes d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$.

Exercice 22.
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Calculer l'intégrale

$$J = \int\int_D (2x^3 - y)dxdy.$$

Exercice 23.
Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Soit γ son bord orienté et ω la forme différentielle $\omega = xy^2dx + 2xydy$. Calculer $\sin t_\gamma \omega$

1) en utilisant une paramétrisation de γ,

2) puis en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 24. *Aire de l'astroïde*
Calculer l'aire du domaine délimité par les axes (Ox), (Oy) et la courbe paramétrée $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 25. *Aire d'une arche de cycloïde*
Calculer l'aire du domaine délimité par l'axe (Ox) et l'arc paramétré $x = a(t - \sin t)$ et $y = a(1 - \cos t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 26. *Aire comprise entre un disque et une hyperbole*
Calculer l'aire de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 4,\ xy \geq 1,\ x > 0\}$.

Longueur d'un arc de courbe

Exercice 27. *Longueur d'une arche de cycloïde*
Calculer la longueur d'une arche de cycloïde : $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 28. *Longueur d'une spire d'hélice*
Calculer la longueur d'une spire d'hélice circulaire :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ht \end{cases}$$

avec $0 \leq t \leq 2\pi$

Exercice 29. *Longueur de la cardioïde*
Calculer la longueur de la cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solutions des exercices

Exercice 1.

On remarque que U est étoilé (par rapport à $(1,0)$ par exemple. On vérifie que ω est fermée : En posant $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, on vérifie que $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Par le théorème de Poincaré, ω est exacte.

On cherche ses primitives sur U, i.e. les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

On résout la seconde équation en intégrant par rapport à y : on trouve $f(x,y)=\text{Arctan}(\frac{y}{x})+H(x)$ où H est $\mathcal{C}^1$ et ne dépend que de x. On a alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=H'(x)-\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

On a donc $H'(x)=0$ sur U, ce qui entraîne que H est constante. Les primitives de f sont donc de la forme : $f(x,y)=\text{Arctan}(\frac{y}{x}+C$ avec C constante.

Exercice 2.

1) On a encore $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=\dfrac{-2x}{y}$.

2) La forme différentielle est fermée et l'ouvert est étoilé, donc d'après le théorème de Poincaré, la forme différentielle est exacte. On peut aussi prouver qu'elle est exacte en calculant ses primitives : on doit alors résoudre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-x^2}{y}.$$

ce qui donne avec la première équation : $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}+H(y)$ et la seconde nous donne $H'(y)=0$. Donc $H(y)$ est constante et $f(x,y)=\frac{x^2}{y}$ est une primitive. Donc ω est exacte.

3) Le calcul ne dépend pas du chemin choisi car la forme est exacte. On trouve :

$$\int_C \omega = f(3,8)-f(1,2)=\frac{5}{8}.$$

Exercice 3.

On a encore $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=3y^2-12xy$, donc la forme est fermée sur $\mathbb{R}^2$ qui est étoilé, donc elle est exacte d'après le théorème de Poincaré. On trouve $f(x,y)=xy^3-3x^2y^2$. On utilise enfin cette primitive pour calculer l'intégrale curviligne et on trouve :

$$\int_C \omega = f(B)-f(A)=-236.$$

Exercice 4.

On constate que ω est exacte et on calcule une primitive. En effet, on l'égalité des dérivées croisées : $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=1$.

La forme est fermée sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de Poincaré, elle est exacte.

On résout la recherche de primitive par contraintes successives : Avec la première, on trouve $f(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+H(y)$. Et en réintroduisant dans la seconde, on trouve $f(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}$. D'où $\displaystyle\int_C \omega = f(0,0)-f(2,0)=-2$.

On peut aussi procéder par changement de variable avec $x = r\cos\theta$...

Exercice 5.

1) Pour que la forme différentielle soit exacte, il faut qu'elle soit fermée, donc que $\phi'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. On en déduit $\phi(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$. La forme différentielle est fermée, elle est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est étoilé, elle est donc exacte d'après le théorème de Poincaré.

2) Il suffit donc de résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy}{(1+x^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-1}{1+x^2} \end{cases}$.

On commence par intégrer la seconde : $f(x,y) = \dfrac{-y}{1+x^2} + H(x)$ et en reportant dans la première, on trouve $H'(x) = 0$. Donc

$$f(x,y) = \frac{-y}{1+x^2}$$

est une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2$.

3) La courbe C est fermée, et la forme différentielle est exacte, donc son intégrale curviligne le long de cette courbe est nulle.

Exercice 6.

1) En notant $P(x,y) = x^2+y^2-a^2$ et $Q(x,y) = -2ay$, on a $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$.

Les dérivées croisées ne sont pas égales, et la forme différentielle n'est pas fermée, donc n'est pas exacte.

2) Il faut que la forme soit fermée. En notant $P_1(x,y) = f(x)P(x,y)$ et $Q_1(x,y) = f(x)Q(x,y)$, on doit avoir :

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = f(x)2y = \frac{\partial Q_1}{\partial x}(x,y) = f'(x)Q(x,y) = f'(x)2ay.$$

La condition est suffisante, car alors on a une forme différentielle fermée, définie sur un ouvert étoilé, $\mathbb{R}^2$; elle est donc exacte. La condition s'écrit donc :

$$2ayf'(x) = -f(x)2y.$$

On en déduit donc que $f'(x) = \dfrac{f(x)}{-a}$, ce qui donne $f(x) = \exp(\frac{-x}{a})$.

3) Soit $F(x,y)$ une primitive de α. Elle vérifie le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \exp(\frac{-x}{a})(x^2+y^2-a^2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -2ay\exp(\frac{-x}{a}) \end{cases}$$

La seconde équation donne $F(x,y) = -ay^2\exp(\frac{-x}{a}) + H(x)$. On reporte cette formule dans la première équation :

$$\exp(\tfrac{-x}{a})y^2 + H'(x) = \exp(\tfrac{-x}{a})(x^2+y^2-a^2) \quad \Rightarrow \quad H'(x) = x^2\exp(\tfrac{-x}{a}) - a^2\exp(\tfrac{-x}{a}).$$

Et en intégrant, on trouve : $H(x) = (-ax^2 - 2a^2x - a^3)\exp(\frac{-x}{a})$.

4) La forme différentielle est exacte, et on intègre sur une courbe fermée, on trouve donc 0.

Exercice 7.

On pose $P(x,y,z) = 3x^2y + z^3$, $Q(x,y,z) = 3y^2z + x^3$ et $R(x,y,z) = 3xz^2 + y^3$. On vérifie que la forme différentielle est fermée en calculant les dérivées partielles croisées :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\quad \text{et}\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}.$$

Comme $\mathbb{R}^3$ est un ouvert étoilé, par le théorème de Poincaré, on sait que ω est exacte. On cherche donc f telle que ses dérivées partielles par rapport à x, y et z soient respectivement P, Q et R.

La première condition donne $f(x,y,z)=x^3y+xz^3+g(y,z)$ où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a, grâce à la deuxième équation $x^3+\dfrac{\partial g}{\partial y}(y,z)=3y^2z+x^3$. On en déduit que $g(y,z)=y^3z+h(z)$ où h est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On cherche de même h via la troisième équation : $3xz^2+y^3+h'(z)=3xz^2+y^3$. La fonction h est donc constante et

$$f(x,y,z)=x^3y+xz^3+y^3z+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

Exercice 8.

On constate facilement que ω est exacte et la recherche d'une primitive donne vite $f(x,y,z)=xy+yz+zx$. Donc ω est fermée et comme C est fermée, cela donne 0.

Exercice 9.

1) On commence par paramétrer γ en remarquant que $x^2(y-\frac{a}{2})^2=(\frac{a}{2})^2$. On reconnaît le cercle de centre $(0,\frac{a}{2})$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On le paramètre en posant $x=\frac{a}{2}\cos\theta$ et $y=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin\theta$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_\gamma y^2dx+x^2dy &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin\theta\right)^2\left(\frac{-a}{2}\sin\theta\right)+\frac{a^2}{4}\cos^2\theta\left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{-a^2\sin^2\theta}{2}d\theta\\ &= \frac{-a^2}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta\\ &= \frac{-a^3\pi}{4}\end{aligned}$$

2) On simplifie l'équation de γ : $\dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}=2$, ce qui donne une ellipse que l'on paramètre par $x=a(1+\sqrt{2}\cos\theta)$ et $y=b(1+\sqrt{2}\cos\theta)$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_\gamma y^2dx+x^2dy &= \int_0^{2\pi} b^2(1+\sqrt{2}\sin\theta)^2(-a\sqrt{2}\sin\theta)+a^2(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2(b\sqrt{2}\cos\theta)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}-4ab^2\sin^2\theta+4a^2b\cos^2\theta d\theta\\ &= -4ab^2\pi+4a^2b\pi\\ &= 4ab\pi(a-b).\end{aligned}$$

Exercice 10.

Le carré n'est pas une courbe $\mathcal{C}^1$, mais on peut recoller les quatre morceaux correspondants aux côtés du carré.

On a $\displaystyle\int_C\omega=\int_{C_1}\omega+\int_{C_2}\omega+\int_{C_3}\omega+\int_{C_4}\omega.$

Par exemple, pour $C_1 = [AB]$, on paramètre le segment avec $f(t) = (x(t), y(t)) = (-t, a)$ avec $t \in [-a, a]$. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \omega &= \int_{-a}^{a} \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t) + y^2(t)} dt \\ &= \int_{-a}^{a} \frac{0 + a}{a^2 + t^2} dt = \left[\text{Arctan}\, \frac{t}{a}\right]_{-a}^{a} \\ &= \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(-1) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

On obtient le même résultat pour les autres, donc $\displaystyle\int_C \omega = 2\pi$.

La forme différentielle n'est pas exacte car si telle était le cas, l'intégrale le long d'un chemin fermé serait nulle.

Exercice 11.

1) $\displaystyle\int_C \omega = \int_{-1}^{1} (x^3 + (x + x^2) \times 2x) dx = \frac{69}{4}$.

2) $\displaystyle\int_C \omega = \int_0^1 x(\sin x + \cos x) dx \underset{=}{IPP} [x(-\cos x + \sin x)]_0^1 - \int_0^1 (-\cos x + \sin x) dx = 2\sin 1 - 1.$

Exercice 12.

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_{[AB]} \omega + \int_{[BC]} \omega + \int_{[CD]} \omega + \int_{[DA]} \omega \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{x - 1}{x + 1} dx + \int_{1}^{-1} \frac{-1 + y}{1 + y^2} dy + \int_{-1}^{1} \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx + \int_{-1}^{1} \frac{1 + y}{1 + y^2} dy \\ &= 4 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = 2\pi.\end{aligned}$$

Exercice 13.

1) $\displaystyle\int_{C_1} \omega = \int_0^1 (x^2 - x^2) dx = 0.$

2) $\displaystyle\int_{C_2} \omega = \int_0^1 (2y^5 - y^3) dy = \frac{1}{12}.$

3) La forme différentielle n'est pas exacte car sinon, l'intégrale ne dépendrait pas du chemin choisi.

On peut vérifier qu'elle n'est pas exacte en démontrant qu'elle n'est pas fermée. (Les différentielles partielles croisées ne sont pas égales).

Exercice 14.

On trouve

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi} (y(t) - z(t))x'(t) + (z(t) - x(t))y'(t) + (x(t) - y(t))z'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-R^2 + hRt(\cos t + \sin t) + hR(\cos t - \sin t)) dt \\ &= -2\pi R(h + R).\end{aligned}$$

Exercice 15.

Les deux domaines sont des disques, que l'on paramètre en utilisant les coordonnées polaires par rapport au centre. Les points d'intersection des cercles étant $(0,0)$ et $(1,1)$, le contour est la réunion de

$$C_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \quad \text{pour } t \in [\tfrac{-\pi}{2}, 0] \quad C_2 : \begin{cases} x = 1 + \cos u \\ y = \sin u \end{cases} \quad \text{pour } u \in [\tfrac{-\pi}{2}, \pi]$$

On intègre :

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega \\ &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} (-(1+\sin t)\sin t + 2\cos^2 t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin^2 u + 2(1+\cos u) cosu)du \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Exercice 16.

On pose $P(x,y) = x + y$ et $Q(x,y) = x - y$. Il est clair que $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 1$.

La forme différentielle est fermée et comme elle est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est étoilé, elle est exacte. On calcule une primitive f de ω sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + y \quad &\Rightarrow \quad f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + H(y) \text{ et} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + H'(y) = x - y \quad &\Rightarrow \quad f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

On peut choisir la constante égale à 0. Comme ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$, on a $\displaystyle\int_C \omega = f(0,0) - f(2,0) = -2$.

Exercice 17.

Il faut paramétrer le cercle : On introduit $z = 1 - x$ dans la seconde équation et on obtient : $4(x - \frac{1}{2})^2 + 2y^2 = 1$. Ce qui donne alors pour paramétrage :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta \end{cases}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$. D'où

$$\begin{aligned} \int_\gamma z dx + x dy + y dz &= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta)(\frac{-1}{2}\sin\theta) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta)(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\frac{1}{2}\sin\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos^2\theta + sin^2\theta)d\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 18.

On paramètre le cercle par $x(t) = R\cos t$ et $y(t) = R\sin t$. où $t \in [-\pi, \pi]$. On a alors

$$V(x(t), y(t)) = (\tfrac{-\sin(t)}{R}, \tfrac{\cos(t)}{R})$$

et

$$(x'(t), y'(t)) = (-R\sin t, R\cos t).$$

Donc

$$\int_C \overrightarrow{V}.\overrightarrow{dM} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi.$$

Le champ de vecteurs ne peut pas dériver d'un potentiel car on trouverait 0 le long d'une courbe fermée.

Exercice 19.

1) On a

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dM} &= \int_0^1 (t^2 - t) \times 2t - 3t^2 \times 2t \times 2 + t^4 \times (-1) dt \\
&= \int_0^1 -t^4 - 10t^3 - 2t^2 dt \\
&= -\left[\frac{t^5}{5} + \frac{5}{2}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 \\
&= \frac{-101}{30}.
\end{aligned}$$

2) On paramètre le segment : $(t, 2t, -t)$. On a donc

$$\int_{[OP]} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dM} = \int_0^1 (t - t) - 12t^2 - t^2 dt = \int_0^1 -13t^2 dt = \frac{-13}{3}.$$

3) Non car les résultats dépendent du chemin choisi.

Exercice 20.

1) On obtient :

$$\int_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dM} = \int_0^\pi (ab\cos^2 t + ab\sin^2 t) dt = \pi ab.$$

On peut aussi interpréter ceci en termes d'aire, car la formule donne le double de l'aire de la demi-ellipse (via la formule de Green-Riemann).

2) On peut remarquer que la forme est fermée sur l'étoilé $\mathbb{R}^2$ via l'égalité des différentielles partielles croisées. La forme différentielle est donc exacte et le champ de vecteurs correspondant dérive d'un potentiel. La circulation le long d'un chemin fermé est donc nulle.

3) On trouve là encore que le champ de vecteurs dérive du potentiel scalaire $f(x, y, z) = x^2y^2z^2 - z^2$, et la courbe étant à nouveau fermée, on a encore une circulation nulle.

Exercice 21.

le paramétrage du domaine donne : $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

On pose $P(x, y) = 2xy - x^2$ et $Q(x, y) = x + y^2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dydx \\
&= \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx \\
&= \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

Exercice 22.

On détermine P et Q tels que $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2x^3$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y^2}{2}$. Par exemple, $Q(x,y) = \dfrac{x^4}{2}$ et $P(x,y) = \dfrac{y^2}{2}$. On paramètre l'intérieur de l'ellipse par $x = a\cos\theta$ et $y = a\sin\theta$. On a donc,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\partial D} Pdx + Qdy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^2\sin^2\theta}{2} \times (-a\sin\theta) + \frac{b^4\cos^4\theta}{2} \times (b\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{4}{15}a^4b - \frac{ab^2}{3} \quad \text{par linéarisation.}
\end{aligned}$$

Exercice 23.

1) Le bord de K est partagé en trois parties : $C_1 = \{(t,0),\ t\in[0;1]\}$, $C_2 = \{(\cos t, \sin t),\ t \in [0;\frac{\pi}{2}]\}$ et $C_3 = \{(0,t),\ t\in[1;0]\}$.

On voit clairement que l'intégrale le long de C_1 ou de C_3 est nulle. Donc

$$I = \int_\gamma \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin^2 t(-\sin t) + 2\cos^2 t\sin t dt = \frac{5}{12}$$

On a utilisé les linéarisations : $-\sin^3 t\cos t = \dfrac{\sin 4t}{8} + \dfrac{\sin 2t}{4}$ et $\cos^2 t\sin t = \dfrac{\sin 3t}{4} + \dfrac{\sin t}{4}$.

2) On a $P(x,y) = xy^2$ et $Q(x,y) = 2xy$ et d'après la formule de Green-Riemann, on a

$$\int_\gamma \omega = \int\int_K (2y - 2xy)dxdy.$$

On calcule cette dernière intégrale en passant aux polaires : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On a $(x,y)\in K \quad\Leftrightarrow\quad 0\le r\le 1$ et $0 \le \theta\frac{\pi}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r\sin\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta)rd\theta dr \\
&= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r^2\sin\theta - r^3\sin 2\theta)d\theta dr \\
&= \int_0^1 (2r^2 - r^3)dr \\
&= \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Exercice 24.

Avec la formule de Green-Riemann, on trouve :

$$A = \frac{1}{2}\int_g ammaxdy - ydx$$

où γ est le bord du domaine orienté. On a alors

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t(3a\cos t\sin^2 t) - a\sin^3 t(-3a\sin t\cos^2 t)dt \\
&= \frac{3a^2}{2}\left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin^2 t dt}_{\frac{\pi}{32}} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t dt}_{\frac{\pi}{32}}\right) \\
&= \frac{3a^2\pi}{32} \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

Exercice 25.

Avec la formule de Green-Riemann, on trouve

$$A = \int_\gamma xdy = -\int_\gamma ydx = \frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx).$$

On choisit la première forme : l'intégrale sur l'axe (Ox) de xdy est nulle, il suffit de choisir le paramétrage $x(t) = 0$ et $y(t) = t$. Il vient :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(1-\cos t)\times a(1-\cos t)dt \\
&= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\cos t + \cos^2 t dt \\
&= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2} dt \\
&= 3\pi a^2 \quad \text{u.a.}
\end{aligned}$$

Exercice 26.

On applique la formule de Green-Riemann. On remarque que l'intersection de $x^2 + y^2 \leq 4$, $xy \geq 1$, $x > 0$ est donnée par deux points :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2 - \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x^2 = 2 + \sqrt{3}.$$

et puisque $x > 0$, on trouve $x_0 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ et $x_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Les ordonnées correspondantes sont $y_0 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $y_1 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Le bord orienté de D se constitue donc de deux parties : C_1 correspond à la partie sur le cercle comprise entre (x_1, y_1) et (x_0, y_0) et C_2 correspond à la partie sur l'hyperbole comprise entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1). On a alors :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= \int_{C_1} xdy + \int_{C_2} xdy \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_0} 2\cos\theta(2\cos\theta)d\theta + \int_{\sqrt{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{2+\sqrt{3}}} t \times \frac{-1}{t^2}dt \\
&= -2\int_{\theta_1}^{\theta_0} (\cos(2\theta)+1)\theta - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right) \\
&= -\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_0) - 2(\theta_1 - \theta_0) - \ln(\sqrt{2+\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Pour la première intégrale, on a utilisé le changement de variables : $x(\theta) = 2\cos\theta$ et $y(\theta) = 2\sin\theta$ avec θ variant de θ_1 à θ_0, les angles polaires associés à (x_i, y_i).

On a $\sin(2\theta_1) = 2\sin\theta_1\cos\theta_1 = \dfrac{x_1y_1}{2} = \dfrac{1}{2}$. De même, $\sin(2\theta_0) = \dfrac{1}{2}$. Il reste à calculer $\theta_1 - \theta_0$. Or $\sin(\theta_1 - \theta_0) = \sin\theta_1\cos\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_1 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Et comme $\theta_0 - \theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\theta_0 - \theta 1 = \frac{\pi}{3}$.

D'où

$$\mathrm{Aire}(D) = \frac{2\pi}{3} - \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Exercice 27.

En notant $f(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ on a

$$||f'(t)|| = \sqrt{4a^2\sin^2\tfrac{t}{2}} = 2a\sin\tfrac{t}{2}.$$

L'arc a donc pour longueur : $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2} = 8a.$

Exercice 28.

On trouve $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{a^2 + h^2}$. La longueur de la courbe vaut donc :

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + h^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2 + h^2}.$$

Exercice 29.

On a $x(\theta) = \rho\cos\theta = a(1 + \cos\theta)\cos\theta$ et $y(\theta) = \rho\sin\theta = a(1 + \cos\theta)\sin\theta$. On en déduit :

$$L = \int_0^{2\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2} = 8a.$$

On pouvait aussi utiliser l'expression de l'abscisse curviligne en coordonnées polaires : $(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2$.