#146

Primitives-Intégrales

Fractions rationnelles

$f(x)$	$F(x)$
$\dfrac{1}{x^3-1}$	$\dfrac{1}{3}\ln\lvert x-1\rvert-\dfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)$
$\dfrac{1}{(x^3-1)^2}$	$-\dfrac{2}{9}\ln\lvert x-1\rvert+\dfrac{1}{9}\ln(x^2+x+1)+\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\Big(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)-\dfrac{x}{3(x^3-1)}$
$\dfrac{1}{x^3(1+x^3)}$	$-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{6}\ln\Big[\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\Big]-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\big[\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\big]$
$\dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$	$-\dfrac{3}{4(x-1)}-\dfrac{1}{4(x+1)}$
$\dfrac{1}{1+x^4}$	$\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\Big[\dfrac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\Big]+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\big[\arctan(1+x\sqrt{2})-\arctan(1-x\sqrt{2})\big]$
$\dfrac{x^2}{1+x^4}$	$\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\Big[\dfrac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}\Big]+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\big[\arctan(1+x\sqrt{2})-\arctan(1-x\sqrt{2})\big]$
$\dfrac{x}{(x^4+1)^2}$	$\dfrac{\arctan x^2}{4}+\dfrac{x^2}{4(x^4+1)}$
$\dfrac{x^2+x+1}{x^3-2x-4}$	$\dfrac{7}{10}\ln\lvert x-2\rvert+\dfrac{3}{20}\ln(x^2+2x+2)-\dfrac{1}{10}\arctan(x+1)$
$\dfrac{x^2-4}{x^6-2x^4+x^2}$	$\dfrac{4}{x}+\dfrac{3x}{2(x^2-1)}+\dfrac{11}{4}\ln\Big\lvert\dfrac{x-1}{x+1}\Big\rvert$
$\dfrac{1}{x^{20}-1}$	$\dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\Big[\dfrac{1}{2}\cos k\alpha\ln(x^2-2x\cos k\alpha+1)-\sin k\alpha\arctan\big(\dfrac{x-\cos k\alpha}{\sin k\alpha}\big)\Big]+\dfrac{1}{20}\ln\Big\lvert\dfrac{x-1}{x+1}\Big\rvert,\quad \alpha=\dfrac{\pi}{10}$
$\dfrac{1}{(x-a)^n(x-b)}$	$\dfrac{1}{(b-a)^n}\ln\Big\lvert\dfrac{x-b}{x-a}\Big\rvert+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k(b-a)^{n-k}(x-a)^k}$

Fonctions trigonométriques

$f(x)$	$F(x)$
$\dfrac{1}{\sin x \sin 4x}$	$-\dfrac{1}{4\sin x}+\dfrac{1}{8}\ln\left\lvert\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right\rvert-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left\lvert\dfrac{1-\sqrt{2}\sin x}{1+\sqrt{2}\sin x}\right\rvert$
$\dfrac{\tan x}{1+\tan x}$	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\ln\lvert\cos x+\sin x\rvert$
$\cos x\sqrt{\cos 2x}$	$\dfrac{\sin x\sqrt{\cos 2x}}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$
$\dfrac{1}{\sin x+\sin 2x}$	$\dfrac{1}{6}\ln(1-\cos x)+\dfrac{1}{2}\ln(1+\cos x)-\dfrac{2}{3}\ln\lvert 1+2\cos x\rvert$
$\dfrac{1}{\cos x\cos 2x}$	$\sqrt{2}\operatorname{Argth}(\sqrt{2}\sin x)-\operatorname{Argth}(\sin x)$
$\dfrac{1}{\sin x\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}$	$-2\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{\sin x}}+\sqrt{2}\arctan\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{2\sin x}}\quad(\text{poser } u=1/\sin x)$
$\dfrac{a\sin x}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-a^2\sin^2 x}}$	$-\arctan\left(\dfrac{\sqrt{\cos^2 x-a^2\sin^2 x}}{a}\right)$

Radicaux

$f(x)$	$F(x)$
$\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$	$\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{5}{2}\ln\left\lvert 2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right\rvert$
$\dfrac{4x-3}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}$	$-\sqrt{-4x^2+12x-5}+\dfrac{3}{2}\arcsin(x-3/2)$
$\dfrac{1}{2x-x^2+\sqrt{2x-x^2}}$	$\dfrac{1-\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$
$\dfrac{1}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$	$\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}-\arcsin\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\quad(\text{poser } x=1+2\cos\varphi)$
$\dfrac{2+\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+4}}$	$(\sqrt{x+3}+4)(\sqrt{x+4}-2)-4\ln(1+\sqrt{x+4})+\ln(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4})$
$x+\sqrt{a^2+x^2}$	$\dfrac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^2}{4}+\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$(x+\sqrt{a^2+x^2})^n$	$\dfrac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n+1}}{2(n+1)}+a^2\dfrac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n-1}}{2(n-1)}\quad(n\neq 1)$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	$\dfrac{1}{6}\ln\left[\dfrac{u^2+u+1}{(u-1)^2}\right]-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}, u=\sqrt[3]{1+1/x^3}\quad(\text{poser } v=1/x^3)$

Divers

$f(x)$	$F(x)$
$x^k \ln x$	$\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\Big(\ln x - \dfrac{1}{k+1}\Big)$
$\ln(1+x^2)$	$x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$
$\dfrac{x^2+a}{x^2+1}\arctan x$	$\dfrac{1}{2}\big((2x+(a-1)\arctan x)\arctan x - \ln(1+x^2)\big)$
$\Big(1-\dfrac{1}{x}\Big)e^{1/x}$	$xe^{1/x}$
$\dfrac{x}{\cos^2 x}$	$x\tan x + \ln\lvert\cos x\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$	$2\arctan\sqrt{e^x-1}$
$\arctan\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}$	$(x+2)\arctan\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}} - \ln\big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\big)$
$\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$	$x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x}$
$e^{\arcsin x}$	$\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{2}e^{\arcsin x}$
$x(\cos^2 x)e^{-x}$	$\dfrac{e^{-x}}{50}\big((3-5x)\cos 2x + (4+10x)\sin 2x - 25(x+1)\big)$
$(x^2+x+1)e^{2x}\cos x$	$(\dfrac{2x^2}{5}+\dfrac{4x}{25}+\dfrac{39}{125})e^{2x}\cos x + (\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{3x}{25}+\dfrac{27}{125})e^{2x}\sin x$

Intégrales définies

$$\int_{t=0}^{\pi/2} \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{16}$$
$$\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{15}$$
$$\int_{t=0}^{\pi/2} t^2\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} - 2$$
$$\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} t^2\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$
$$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t} = 1$$
$$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)$$
$$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{\sqrt{1-a\sin t}}\,\mathrm{d}t = \frac{4(2-(a+2)\sqrt{1-a})}{3a^2}$$

$$\int_{t=0}^{1} t\ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}$$
$$\int_{t=0}^{1} \arcsin t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1$$
$$\int_{t=0}^{3} \frac{2t}{(1+t^2)(3+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$$
$$\int_{t=0}^{1} \frac{t^2\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \ln\sqrt{2}$$

$$\int_{t=0}^{\ln 2} \sqrt{e^t-1}\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{\pi}{2}$$
$$\int_{t=4}^{9} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}-1} = 2 + 2\ln 2$$
$$\int_{t=0}^{1} \frac{te^t}{\sqrt{e^t+1}}\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{e+1} + 4\ln\Big[\frac{\sqrt{e+1}+1}{\sqrt{2}+1}\Big] -$$
$$\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(1-a^2t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = a\ln\left|\frac{1-a}{1+a}\right| - \ln(1-a^2)$$

$$\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{6}(3 - \frac{4}{\sqrt{3}})$$
$$\int_{t=-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t^2+1}} = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$$

$$\int_{t=-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$$
$$\int_{t=0}^{1} \frac{t^2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Exercice 1. ♪

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$,

2) $\displaystyle\int_1^2 (3t^2+1)\ln t dt$,

3) $\displaystyle\int_2^3 \ln(x^2)dx$,

4) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx$.

Exercice 2. ♪

Calculer $I = \displaystyle\int_{t=0}^{3} \frac{t\ln(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 3. *A bit more !*

1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2+1)^3\mathrm{d}x = 0,$

2) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \frac{7}{8},$

3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{2}-1,$

4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \ln(\sqrt{3}-1),$

5) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos^5 x\mathrm{d}x = \frac{203}{480},$

6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x} = \frac{\ln 3}{4},$

7) $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} = -\ln(\ln 2),$

8) $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$

9) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x+1}{x}(\ln x+x)^3\mathrm{d}x = \frac{(\ln 3+3)^4-1}{4},$

10) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{-x}} = 1,$

11) $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Arctan}\frac{5}{\sqrt{7}},$

12) $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+2}} = \ln(5+4\sqrt{2})-\frac{\ln 7}{2},$

13) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{9+\sqrt{69}-3\sqrt{6}-\sqrt{46}}{2}\right),$

14) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}} = \frac{\pi}{6},$

15) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \ln\frac{5+\sqrt{21}}{3+\sqrt{5}},$

16) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-1},$

17) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+4} = \frac{1}{4}\operatorname{Arctan}\frac{3}{4},$

18) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{\pi}{6},$

19) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x-1)^2\operatorname{ch} x\mathrm{d}x = 2(\operatorname{sh}1-1) = e-e^{-1}-2,$

20) $\displaystyle\int_{1}^{2} 3(x-1)^2\ln x\mathrm{d}x = 2\ln 2-\frac{5}{6},$

21) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} x\operatorname{Arctan} x\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2},$

22) $\displaystyle\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \operatorname{Arcsin} x\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}\right)},$

23) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1+e^{-\pi}),$

24) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x\mathrm{d}x} = \frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2},$

25) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{-1}{4}+\frac{\pi}{8},$

26) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8},$

27) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \ln\frac{7}{4},$

28) $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3},$

29) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2,$

30) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}-\frac{2}{3},$

31) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sin^2 x+1}\mathrm{d}x = -2+5\operatorname{Arctan}\frac{1}{2},$

32) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+\cos x-2}\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}+\ln\frac{6}{5},$

33) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2-2x|e^{-x}\mathrm{d}x = 8-e-16e^{-2},$

34) $\displaystyle\int_{0}^{2} x\sqrt{|x^2-1|}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}+\sqrt{3},$

35) $\displaystyle\int_{0}^{n\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = 2n \quad (n\in\mathbb{N}),$

36) $\displaystyle\int_{0}^{n\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{n\pi}{2} \quad (n\in\mathbb{N}),$

37) $\displaystyle\int_{0}^{100} (\sqrt{x}-\lfloor\sqrt{x}\rfloor)\mathrm{d}x = \frac{155}{3},$

38) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6},$

39) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x+1}{\sqrt{4x-1}}\mathrm{d}x = \frac{13}{12}\sqrt{11}-\frac{3}{4}\sqrt{3},$

40) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}\mathrm{d}x = \sqrt{5}\ln\left(\frac{4\sqrt{10}+13}{3}\right)-4\ln(\sqrt{2}+1),$

41) $\displaystyle\int_{-3}^{1} ((x-1)\sqrt{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = -8(\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}),$

42) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2+\sqrt[3]{x+1}}{2-\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x = 48\ln 2-31,$

43) $\displaystyle\int_{0}^{4096} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x = \frac{39\ 903\ 784}{1\ 365}-10\ln 3-2\sqrt{3}\pi,$

Exercice 4. ♪

Donner une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1) $f : t \longmapsto te^{-t^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

2) $g : t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

3) $h : t \longmapsto \dfrac{t}{\sqrt{a+t^2}}$ avec $a \in]0, +\infty[$, sur $I = \mathbb{R}$.

4) $k : t \longmapsto \ln t$ sur $I =]0, +\infty[$.

Exercice 5. ♪

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{e^x+1}dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$.

Exercice 6. ♪ *(Mines-Ponts '71)*

Calculer $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}$.

Exercice 7.

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ en utilisant un changement de variable.

Exercice 8.

Avec une IPP calculer $\displaystyle\int_1^e \ln(1+\frac{1}{x})dx$.

Exercice 9. ♪

Calculer $I_p = \displaystyle\int_0^{\pi} (\cos t)^p \mathrm{d}t$ puis $J_p = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p} \mathrm{d}t$ où $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$,

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$,

3) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$,

4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$,

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

Exercice 11.

On pose $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln t}{t}dt$.

Calculer I de deux façons différentes.

Exercice 12. ♪ *Changements de variables.*

Effectuer les changements de variables proposés pour calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$, avec $x = \tan t$.

2) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$, avec $t = \sqrt{x+1}$.

3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, avec $u = \sin t$.

4) $\displaystyle\int_2^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$, avec $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 13.

Déterminer une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x}$.

Exercice 14. ♪ *Changements de variable*

On veut calculer

$$\int_1^2 \sqrt{x^2+x-2}\mathrm{d}x.$$

1) Effectuer les trois changements de variable suivants :

a) $x+u=\sqrt{x^2+x-2}$, **b)** $v=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$, **c)** $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\operatorname{ch} t$.

2) La calculer en finissant l'un des calcul précédent.

Exercice 15.

Calculer une primitive $I=\int x^2e^x\sin x dx$.

Exercice 16.

Calculer $I=\int \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}dx$.

Exercice 17.

Pour $x>0$, on définit $f(x)=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Exercice 18.

Calculer $\lim\limits_{a\to 0}\displaystyle\int_0^{\pi}\tan(a\sin x)dx$.

Exercice 19.

Calculer $I=\int \dfrac{\sin x}{\sin x-\cos x}dx$.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) $\dfrac{4-2\sqrt{2}}{3}$.

2) $10\ln 2 - \dfrac{10}{3}$.

3) $6\ln 3 - 2 - 4\ln 2$.

4) $2 - 5e^{-1}$. Double IPP ou par identification.

Exercice 2.

Une IPP donne $I = \ln^2 2 - I$, donc $I = \dfrac{\ln^2 2}{2}$.

Exercice 3.

12) $= [\text{Argsh}\,\dfrac{2x+1}{\sqrt{7}}]$

13) $= \dfrac{1}{\sqrt{3}}[\text{Argch}\,\dfrac{\sqrt{3}x}{2}]$

14) $= [\text{Arcsin}(\frac{x-2}{2}]$

15) $= [\text{Argch}\,\frac{x+1}{2}]$

16) Pas définie.

18) $= [2\,\text{Arctan}\,\sqrt{x}]$

19) double IPP.

20) IPP.

21) IPP.

22) IPP.

23) IPP.

24) IPP.

27) $u = \sin x$.

28) $u = \tan\frac{x}{2}$.

29) $\tan^3 x = \tan x(1+\tan^2 x) - \tan x$.

30) $u = \tan x$.

31) $u = \sin x$.

32) Le dénominateur s'annule en 0, mais on peut prolonger par continuité et on pose $u = \cos x$.

38) On pose $u = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ puis on fait une IPP.

40) Poser $u = x + \sqrt{x^2+1}$.

41) Poser $x + 1 = 2\,\text{sh}\,t$.

42) $u = \sqrt[3]{x+1}$

43) Poser $x = t^{12}$.

Exercice 5.

$3 - \ln(e^2+1) + \ln(e^{-1}+1)$ pour la première et $2(\ln(e^2+1) - \ln 2 - 1)$ pour la seconde avec un caprice.

Exercice 6.

On pose $u = \sqrt{1+e^x}$ et on trouve $I = 2\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + c$.

Exercice 9.

Avec la formule d'Euler et celle du binôme de Newton, on trouve

$$\cos^p t = 2^{-p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} e^{i(2k-p)t}$$

En regroupant les indices k et $p-k$, on trouve $\binom{p}{k}(e^{i(2k-p)t} + e^{-i(2k-p)t}) = 2\binom{p}{k}\cos(2k-p)t$. Or $\int_0^\pi \cos(2k-p)t\mathrm{d}t = 0$ si $2k \neq p$.

Donc

$$\int_0^\pi \cos^p t\mathrm{d}t = 0 \quad \text{si } p \equiv 1\ (2) \qquad\qquad \int_0^\pi \cos^p t\mathrm{d}t = 2^{-p}\pi\binom{p}{\frac{p}{2}} \quad \text{si } p \equiv 0\ (2).$$

Pour J_p, on a $\int_0^\pi \cos^{2p} t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^{2p} t\mathrm{d}t$. Or en utilisant le changement de variable $u = \pi - t$ dans la seconde intégrale, on retrouve la première. Donc $J_p = \frac{\pi}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p}$.

Exercice 11.

Par changement de variable $u = \ln(t)$.

Exercice 12.

1) $\frac{\pi}{4}$.

2) $\frac{8}{3}$.

3) $\frac{-\pi}{12}$.

4) Idem que la précédente après le changement.

Exercice 13.

Règle de Bioche : $x \longmapsto x+\pi$ et changement de variable $u = \tan x$. Puis utiliser $\sin \mathrm{Arctan}\, x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\cos \mathrm{Arctan}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 14.

1) a) $= \int_{-1}^{0} -2\frac{(u^2-u-2)^2}{(2u-1)^2}\mathrm{d}u$

b) $= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{18v^2}{(1-v^2)^3}\mathrm{d}v$

c) il s'agit d'un changement hyperbolique. $= \int_0^{\ln 3} \frac{9}{4}\,\mathrm{sh}^2\, t\mathrm{d}t = \frac{9}{4}\left[\frac{\mathrm{sh}\, 2t}{4} - \frac{t}{2}\right]_0^{\ln 3} = \frac{5}{2} - \frac{9\ln 3}{8}$.

Exercice 15.

On calcule $\int x^2 e^x e^{ix} dx$ et on prend la partie imaginaire. Une primitive est de la forme $(ax^2+bx+c)e^{1+i)x}$. En dérivant et en résolvant le système, on trouve $a = \frac{1-i}{2}$, $b = -i$ et $c = \frac{1+i}{2}$. On obtient $I = e^x(x^2(\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x) - x\cos x + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x))$.

Exercice 16.

Avec une IPP, on a $I = [\mathrm{Arctan}\, x\frac{x^3}{3}]_0^x - \int \frac{x^3}{3(1+x^2)}dx = \frac{x^3}{3}\,\mathrm{Arctan}\, x - \frac{1}{6}(x^2 - \ln(1+x^2)) + Cste$.

Exercice 17.

On a $\frac{\sin t}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{t}{6} + t^2\varepsilon(t)$. Donc on peut trouver ε_0 tel que dans un voisinage de 0, on ait :

$$\frac{1}{t}-\frac{t}{6}-t^2\varepsilon_0 \leq \frac{\sin t}{t^2} \leq \frac{1}{t}-\frac{t}{6}+t^2\varepsilon_0.$$

Donc

$$\underbrace{[\ln t]_x^{3x}}_{=\ln 3}-\frac{1}{12}\underbrace{[t^2]_x^{3x}}_{\to 0}-\frac{\varepsilon_0}{3}\underbrace{[t^3]_x^{x^3}}_{\to 0} \leq f(x) \leq \underbrace{[\ln t]_x^{3x}}_{=\ln 3}-\frac{1}{12}\underbrace{[t^2]_x^{3x}}_{\to 0}+\frac{\varepsilon_0}{3}\underbrace{[t^3]_x^{x^3}}_{\to 0}$$

Et d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln 3$.

Exercice 18.

On a $\tan u \underset{0}{\sim} u$ (ici $a\sin x \to 0$ quand $a \to 0$). Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $u - u\varepsilon_0 \leq \tan u \leq u + u\varepsilon_0$. D'où l'encadrement :

$$\int_0^\pi \sin x dx - \varepsilon_0 \int_0^\pi \sin x dx \leq I \leq \int_0^\pi \sin x dx + \varepsilon_0 \int_0^\pi \sin x dx \quad \Leftrightarrow \quad -2\varepsilon_0 \leq I - 2 \leq 2\varepsilon_0.$$

D'où la limite cherchée : $\lim\limits_{a\to 0} \int_0^\pi \tan(a\sin x)dx = 2$.

Exercice 19.

On écrit $\dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x} + \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$, la dernière fraction étant de la forme $\dfrac{u'}{u}$. D'où $I = \dfrac{1}{2}(x + \ln|\sin x - \cos x|)$.