#153

Séries numériques

Khôlles - Classes prépa — Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♪

Déterminer la partie entière de $S = \sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 2. *Bulletin APMEP 427.*

Soit (u_n) la suite définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence $u_{n+2} = u_n - |u_{n+1}|$.

1) Montrer que si la suite converge, la série de terme général u_n converge aussi.

2) Existe-t-il d'autres suites que la suite nulle qui sont convergentes et de ce type ?

a) Montrer que si (u_n) est de ce type et convergente, alors elle converge vers 0 ou diverge vers $-\infty$.

b) Si (u_n) tend vers 0, déterminer u_n.

Exercice 3. ♩

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1) Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$.

2) Que dire de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^3}$?

Exercice 4. *On pose* $S_n = \frac{\pi^2}{2^{2n+4}} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2\left((2k-1)\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$.

1) Montrer que $S_n = \frac{\pi^2}{8}$.

2) Montrer que si $0 < \sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta$ alors $\frac{1}{\sin^2\theta} - 1 \leq \frac{1}{\theta^2} \leq \frac{1}{\sin^2\theta}$.

3) Dans la suite, on pose $I_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{(2k-1)^2}$ et $J_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que $\frac{\pi^2}{8}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq I_n \leq \frac{\pi^2}{8}$.

b) Etablir que $I_n + \frac{J_n}{4} = J_{n+1}$.

c) Montrer que $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8}\frac{1}{2^{n-1}} \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{6}$.

d) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 5. *Étude de convergence*

Étudier la convergence des séries de terme général :

1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$.

2) $\mathrm{ch}^\alpha n - \mathrm{sh}^\alpha n$.

3) $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$.

4) $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

5) $\arccos\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.

6) $\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.

7) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$.

8) $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

9) $\dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$.

10) $\dfrac{2.4.6\ldots(2n)}{n^n}$.

11) $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.

12) $\dfrac{1!-2!+\cdots\pm n!}{(n+1)!}$.

13) $\dfrac{(-1)^n}{\ln n+\sin(2n\pi/3)}$.

14) $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$.

15) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

16) $\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

17) $\dfrac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$.

18) $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

19) $\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k}$.

20) $e^{\frac{1}{n^2}}$.

21) $\dfrac{1}{(\ln n)^n}$.

22) $\ln\left(1+\left(\dfrac{-1}{n}\right)^n\right)$.

23) $\dfrac{n^3-n^2-n-1}{n!}$.

24) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

25) $\left(\dfrac{1}{n}+\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$.

26) $\dfrac{n^2}{2^n+n}$.

27) $e^{n^{\frac{1}{3}}-\sqrt{n}}$.

28) $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

29) $(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1})$.

30) $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

31) $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^n$.

32) $\dfrac{(3n)!}{9(n!)^3}$.

33) $\dfrac{n^n(\ln n)^n}{n!}$.

Exercice 6. *Calcul de sommes*

Après avoir justifié de la convergence, calculer les sommes des séries suivantes :

1) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{k^2-1}$.

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)\ldots(k+p)}$.

4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.

5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{k(k+3)}\right)$.

6) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$.

7) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\ln\left(\cos\dfrac{\alpha}{2^k}\right)$.

8) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^{-k}\tan(2^{-k}\alpha)$.

9) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2k^3-3k^2+1}{(k+3)!}$.

10) $\sum\limits_{n=p}^{\infty}C_n^p x^n$.

11) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}$.

12) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k-n[k/n]}{k(k+1)}$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

14) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(n-1)}{6^n}$.

15) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+n+1}{n!}$.

16) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^2}{(k+1)!}$.

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n2^{2n+1}}{5^{n-1}}$.

18) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}$.

Exercice 7.

Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes positifs et si Σu_n et Σv_n convergent, alors $\Sigma\sqrt{u_n v_n}$ converge.

Exercice 8.

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3X + 1$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{P(n)}{n!}$ est convergente et en calculer la somme.

Exercice 9.
Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

1) Vérifier que la suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si $a + b = -1$.
2) Déterminer a et b pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.

Exercice 10.
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs ou nuls, convergentes.
1) Montrer que les séries $\sum \min\{u_n, v_n\}$ et $\sum \max\{u_n, v_n\}$ convergent.
2) Si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, alors $0 < a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < b$ (moyenne harmonique et géométrique). Montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ convergent.

Exercice 11.
Soit (u_n) une suite à termes réels (quelconques).
1) Donner un exemple tel que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge. On suppose dans les questions suivantes que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent.
2) Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $\sum u_n^k$ converge.
3) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable, telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\sum f(u_n)$ converge.

Exercice 12. *Questions de cours*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et n_0 un entier tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad t_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

1) Montrer que les suites (s_n) et (t_n) sont croissantes à partir de n_0, et qu'il existe un réel a tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq t_n + a$.
2) En déduire que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
3) On suppose que u_n est équivalent à v_n quand n tend vers l'infini. Démontrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.
4) On suppose qu'il existe $r < 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq r u_n$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
5) On suppose que $\sum u_n$ diverge. Démontrer que la série de terme général $(-1)^n/s_n$ converge.

Exercice 13.
On pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$ où p est un entier naturel fixé.
1) Si $p = 0$ ou $p = 1$, la suite (u_n) est-elle convergente ?
2) On suppose dans la suite que $p > 1$ et on étudie la série de somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $(n + p + 2)u_{n+2} = (n + 2)u_{n+1}$.
b) En déduire que $S_n = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n + p + 1)u_{n+1})$.

Exercice 14. ♩ *(Mines-Ponts '71)*
Soit une suite (u_n) décroissante et positive.
Montrer que les séries de termes généraux u_n, $2^n u_{2^n}$, $n^p u_{n^{p+1}}$ et $\dfrac{u_n}{S_n}$ sont de même nature.

Exercice 15.

1) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k! - n! \leq (n-1)(n-2)! + (n-1)!$.

2) En déduire $\sum_{k=0}^{n} k! - n! \leq 2(n-1)!$.

3) Trouver un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} k!$.

Exercice 16. *(NEW) (American Mathematical Monthly #110, January 2003)*

On pose $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13}$... en remplaçant dans a_n chaque fraction $\frac{1}{d}$ par $\frac{1}{d+1} + \frac{1}{d^2+d+1}$.

1) Écrire a_4.

2) Montrer que $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x < x$ pour $0 < x \leq 1$.

3) Montrer que $\arctan\left(\dfrac{1}{d+1}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{d^2+d+1}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{d}\right)$.

4) On écrit dorénavant $a_n = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{1}{d_i}$ avec $m = 2^{n-1}$. On a clairement $d_i \geq n$ pour tout i.

Montrer que

$$a_n\left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) < \sum_{i=1}^{m} \arctan\frac{1}{d_i} < a_n$$

5) Déterminer alors la limite de (a_n).

Exercice 17. ♪

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$.

1) Vérifier que u_n est bien définie pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer u_1.

2) a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)dx$.

b) Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de n. En déduire u_3.

3) Etudier les variations de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.

4) a) Déterminer un réel K élément de $]0;1[$ tel que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\sin(x) \leq K$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{2\pi}{3}K^n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) a) Utiliser la question précédente pour montrer que la série de terme général u_n est convergente.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)}dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x(1-sinx)}dx$.

c) En déduire que la somme S de la série de terme général u_n est égale à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)}dx$.

d) En effectuant le changement de variable $u = \sin x$, montrer que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1-u)^2(1+u)}du$.

e) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, \quad \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1-u)^2}.$$

En déduire la valeur de S.

Exercice 18. ♪ *(Mines-Ponts '71)*

Etudier la série de terme général $u_n = \dfrac{a - (-1)^n\sqrt{n}}{n - (-1)^n\sqrt{n}}$.

Exercice 19. ♪ *(Mines-Ponts '71)*

Trouver a et b pour que la série de terme général $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ converge.

Exercice 20. ♪ *(Mines-Ponts '71)*

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2$.

Etudier la série de terme général $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

Exercice 21. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Montrer que la série de terme général $u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est semi convergente.

Exercice 22. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Montrer que la série de terme général $u_n = \sin(n!e\pi)$ est semi convergente.

Exercice 23. ♪ *(Mines-Ponts '71)*

Etude des séries de terme général u_n et v_n avec

$$u_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4} \qquad v_n = (-1)^{n+1}u_n.$$

Exercice 24. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Calculer la limite, lorsque $n \longrightarrow +\infty$ de la suite u_n définie par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}.$$

Exercice 25. ♪ *(Mines-Ponts '71)*

1) Etudier la suite puis la série de terme général $u_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$.

2) Mêmes questions avec $u_n = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$ avec $f \in \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 26. ♪ *(Mines-Ponts '71)*

Soit (a_n) une suite de termes positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. On suppose de plus $a_n < \frac{S_n}{n^2}$.

Etudier la convergence de la série de terme général a_n.

Exercice 27. 𝅗𝅥 *(Mines-Ponts '71)*

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{3+\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{1+\sqrt{5+\ldots\sqrt{d_n}}}}}}$ avec a_n la $n^{\text{ième}}$ décimale de π.

Etudier la convergence de cette suite.

Exercice 28. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Soit u_n le terme général d'une série à termes positifs divergente et (a_n) une suite à termes positifs convergeant vers ℓ. On pose $v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} u_k}$.

1) Calculer la limite de v_n quand n tend vers l'infini.

2) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \cdots + \sin\frac{1}{n}}{n}$.

Exercice 29. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Soient (u_n) une suite réelle positive terme général d'une série convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1) Etudier la convergence de la série de terme général $v_n \dfrac{u_n}{(R_n)^\alpha}$ pour $\alpha \in \{0, 1\}$.

2) En déduire la nature de la série pour $\alpha < 0$ et $\alpha > 1$.

Exercice 30. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Etudier la série de terme général $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^n}$

(On pourra démontrer la formule de Stirling : $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$).

Exercice 31. *Centrale PC 1999*

Soit la suite de terme général : $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ où P est un polynôme. A quelle condition sur P la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 32. *Ensi PC 1999*

Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\Big(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\Big)$?

Exercice 33. ♩ *(Mines-Ponts '71) Critère de Duhamel*

Etudier la série de terme général $u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{k}$

Exercice 34. *Mines MP 2000*

Soit $\alpha > 0$. Étudier la série $\sum u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Exercice 35. *Mines MP 2003*

Si $\alpha > 0$, donner la nature des séries $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$, $\sum_{n\geq 2} \ln\Big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big)$ et $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n\ln n}$.

Exercice 36. *Ensi PC 1999*

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} - n \to \infty - > a$ et $\dfrac{u_{2n}}{u_{2n-1}} - n \to \infty - > b$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 37. *Encadrement*

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, et $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n. Montrer que $\sum v_n$ converge.

Exercice 38. *Calcul approché*

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \Big(n\sin(0.4/n)\Big)^n$ converge. Calculer à la machine une valeur approchée à 10^{-8} près de sa somme.

Exercice 39. *Ensi MP 2002*

On suppose que la série à termes positifs de terme général u_n est divergente et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue décroissante. Comparer les énoncés :
1. f est intégrable
2. La série de terme général $u_n f(S_n)$ converge.

Exercice 40. *Centrale P' 1996*
Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ converge. Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de sa somme.

Exercice 41. $C_{2n}^n/n4^n$
L'une au moins des deux séries : $\sum \frac{C_{2n}^n}{n4^n}$ et $\sum \frac{n4^n}{C_{2n}^n}$ diverge. Dire pourquoi et dire laquelle.

Exercice 42. $1/(1+n^2u_n)$, *Mines-Ponts MP 2005*
Soit (u_n) une suite réelle positive et $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge. Étudier le cas où $\sum u_n$ diverge.

Exercice 43. $a_n/(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$
Soit (a_n) une suite réelle positive. On pose $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$.
1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ lorsque $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 44. $1/a^{\text{nb de chiffres de } n}$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n (sans zéros inutiles). Soit $a > 0$. Étudier la convergence et déterminer la somme éventuelle de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k}}$.

Exercice 45. *Cauchy-Schwarz*
Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.
1) Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.
2) Montrer que $\sum (u_n+v_n)^2$ converge et : $\sqrt{\sum (u_n+v_n)^2} \leq \sqrt{\sum u_n^2} + \sqrt{\sum v_n^2}$.

Exercice 46. $(-1)^n/(n^{3/4}+\cos n)$
Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n}$.
1) La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2) En écrivant $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + v_n$, étudier la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 47. *Reste d'une série alternée*
On pose $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 48.
Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

Exercice 49. *Chimie P 90*
1) Résoudre les équations différentielles : $y''+2y'+2y=0$, $y''+4y'+4y = 2e^{-x}\cos x$.
2) Soit f la solution commune. On définit la série de terme général $u_n = \int_{x=n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx$. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 50. $1/n^2(n+1)^2$

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

Exercice 51. $1/(1^2+2^2+...+n^2)$

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 52. $\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer alors la somme de la série.

Exercice 53. $\arctan(1/(k^2+k+1))$

Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\Big(\frac{1}{k^2+k+1}\Big) = \frac{\pi}{2}$. (On pourra calculer $\tan s_n$)

Exercice 54. $\arctan(n+a) - \arctan n$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la série de terme général $\arctan(n+a) - \arctan n$ est convergente.

2) On pose $S(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (\arctan(k+a) - \arctan k)$. Trouver $\lim_{a\to+\infty} S(a)$.

Exercice 55. *Pile en porte à faux*

Peut-on empiler 100 pièces de 1F de sorte que la dernière soit complètement en porte à faux ? (cad que sa projection sur un plan horizontal ne rencontre pas la projection de la première pièce)

Exercice 56. *Recherche d'équivalents*

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de :

1) $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. **2)** $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.

Exercice 57. $\ln^2(k)$

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 58. $k^{-2/3}$

Trouver la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$.

Exercice 59. $(-1)^k\sqrt{k}$

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k\sqrt{k}$. Donner un équivalent de u_n quand $n > \infty$. (Regrouper les termes deux par deux puis comparer à une intégrale)

Exercice 60. *Constante d'Euler*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante. On pose $u_n = f(n)$ et $s_n = u_0 + \cdots + u_n$.

Montrer que la suite de terme général $s_n - \int_{t=0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Donner une interprétation graphique de ce fait.

Application : On pose $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$. Justifier l'existence de γ et montrer que $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$.

Exercice 61. *Constante d'Euler (Centrale MP 2003)*

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln n$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln n$. Les suites (S_n) et (T_n) sont-elles adjacentes ?

Exercice 62. *Constante d'Euler, Mines-Ponts MP 2005*

Soit $u_{n,k}$ le reste de la division du n par k. Quelle est la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{u_{n,k}}{k}$?

Exercice 63. *Mines MP 2003*

Soit la suite de terme général $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n}$.

1) Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

2) Montrer que la suite de terme général : $v_n = u_n - \frac{\ln^2 n}{2}$ est convergente.

3) Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$. Donner un équivalent de $v_n - \ell$.

Exercice 64. *Centrale MP 2001*

Donner un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2-k^2}$.

Exercice 65. $1/n\ln^2(n)$

1) Prouver la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$.

2) On note $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=2}^{\infty} u_k$. Montrer que $\frac{1}{\ln(n+1)} \leq S - S_n \leq \frac{1}{\ln n}$ pour $n \geq 2$.

3) Montrer que si S_n est une valeur approchée de S à 10^{-3} près alors $n > 10^{434}$.

4) On suppose disposer d'une machine calculant un million de termes de la série par seconde avec 12 chiffres significatifs. Peut-on obtenir une valeur approchée de S à 10^{-3} près ? (Rmq : 1 an $\approx$ 32 millions de secondes)

5) Donner une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

Exercice 66. $(x-1)\zeta(x) > 1$

Pour $x > 1$ on note $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$. En comparant $\zeta(x)$ à une intégrale, trouver $\lim_{x\to 1^+} (x-1)\zeta(x)$.

Exercice 67. $u_n/(1+u_n)$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 68. *Série des restes*

1) Soit (u_n) une suite réelle telle que $\sum |u_n|$ et $\sum n|u_n|$ convergent. On note $v_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.

a) Montrer que $nv_n - n \to \infty - > 0$.

b) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} nu_n$.

2) Application : Calculer lorsque c'est possible : $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$.

Exercice 69.

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}.$$

1) Etude de la nature de la suite (S_n).

a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

b) En déduire que, pour tout $k \geq 4$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln k}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x} dx$$

c) En déduire l'existence de trois constantes A, B et C telles que, pour tout entier $n \geq 4$, on ait :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C$$

d) En déduire la limite de la suite (S_n).

2) Etude asymptotique de la suite (S_n).

a) On considère les entiers $n \geq 4$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = 1$.

b) En déduire que la suite $\left(\dfrac{S_n}{\ln^2(n)}\right)$ converge et préciser sa limite.

c) On définit la suite u par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \dfrac{\ln^2(n)}{2}$. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$

d) En déduire la convergence de u. Dans la suite du problème, on appelle ℓ cette limite.

3) Etude de la série alternée associée.

On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\ln k}{k}$$

a) Prouver que, pour tout entier $n \neq 0$, on a

$$S_{2n} - A_{2n} = S_n + \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

b) En déduire A_{2n} en fonction de u_{2n}, u_n, la fonction ln et $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

c) On admet que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et on note γ sa limite.

Montrer que la suite (A_{2n}) converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

d) En déduire que la suite (A_{2n+1}) converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

e) Que peut-on en déduire au sujet de la suite (A_n) ?

Exercice 70. *X MP* 2001*

Soit (u_n) une suite réelle positive, $U_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$ et $\alpha > 0$ un réel donné. On suppose $\dfrac{U_n}{nu_n} - n \to \infty - > \alpha$.

Étudier la suite de terme général $\dfrac{1}{n^2 u_n} \sum\limits_{k=0}^{n} k u_k$.

Exercice 71. $\sum nu_n$ *converge*

On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que la série $\sum_{n\geq 1} n\,u_n$ converge. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Exercice 72. (u_n) *décroit*

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1) Montrer que $nu_n - n \to \infty - > 0$. $\left(\text{considérer } \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\right)$

2) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3) Application : calculer pour $0 \leq r < 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k$.

Exercice 73. u_n/S_n

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs convergeant vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1) Si la série $\sum u_n$ converge, que dire de la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$?

2) Si la série $\sum u_n$ diverge, montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge aussi. On pourra considérer $p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{u_k}{S_k}\right)$.

Exercice 74. *Polytechnique MP* 2000*

On donne une suite de réels strictement positifs (a_n), décroissante et de limite nulle. Montrer que la série de terme général $\dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge.

Exercice 75. $(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1})/n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $v_n = \dfrac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}}{n}$. Montrer que $\sum v_n$ a même nature que $\sum u_n$.

Exercice 76. $\sum ku_k/n(n+1)$

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite positive. On pose $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et éventuellement même somme.

Exercice 77. $\sum ku_k/n^2$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.

Étudier la convergence de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} ku_k$.

Exercice 78. *Principe d'accumulation*

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Applications : Retrouver la convergence des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Étudier la convergence des séries de Bertrand : $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Exercice 79. $u_{n+1} = 1/ne^{u_n}$. *Ensi P 90*

Soit (u_n) définie par : $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{ne^{u_n}}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 80. $x_{n+1} = x_n + x_n^2$

Soit (x_n) une suite définie par : $x_0 > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

1) Montrer que $x_n - n \to \infty - > +\infty$.

2) On pose $u_n = 2^{-n} \ln x_n$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On étudiera la série $\sum u_{n+1} - u_n$)

3) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

Exercice 81. $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

On considère la suite (u_n) définie par : $0 < u_0 < 1$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1) Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2) Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.

3) Montrer que les séries de termes généraux $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n divergent.

4) Montrer que $u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et que la suite (nu_n) est croissante. On note ℓ sa limite.

5) On pose $u_n = \dfrac{\ell - v_n}{n}$. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.

6) En déduire que u_n est équivalent à $\dfrac{1}{n}$.

Exercice 82. $u_{n+1}/u_n = (n+a)/(n+b)$

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$ où a, b sont deux constantes réelles ($-a, -b \notin \mathbb{N}$).

1) Montrer que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang.

2) On pose $v_n = (n+b-1)u_n$. Étudier la convergence de la suite (v_n) (on introduira la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$).

3) En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a - b + 1 < 0$ et calculer sa somme en fonction de a, b, u_0.

Exercice 83.

On se donne u_1 et a deux réels strictement positifs et l'on définit par récurrence la suite (u_n) par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^a u_n}$. Étudiez la limite de la suite (u_n), et, quand $a \leq 1$, en donner un équivalent.

Exercice 84. $1/k^\alpha(n-k)^\alpha$

Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 85. *Produit de Cauchy de trois séries*

Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ trois séries absolument convergentes de sommes A, B, C.

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$. Montrer que $\sum u_n = ABC$.

Exercice 86. *Produit de séries géométriques*

Soient $a \in [0,1[$. Écrire $\dfrac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} ka^k$. Calculer par la même méthode $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a^k$.

Exercice 87. *Produit de séries géométriques*

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note T_n le nombre de manières de décomposer n francs avec des pièces de 1, 2, 5 et 10 francs ($T_0 = 1$). Montrer que :

$$\forall\ x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{\infty} T_k x^k = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}.$$

Exercice 88. $\sum u_k/2^{n-k}$

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1} + \dfrac{u_{n-1}}{2} + \cdots + \dfrac{u_0}{2^n}$.

1) Montrer que $v_n - n \to \infty - > 0$.

2) Montrer que $\sum v_n$ converge et donner sa valeur.

Exercice 89. $\sum a_n/n^p = 0$

Soit (a_n) une suite bornée telle que pour tout entier $p \geq 2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^p} = 0$. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0$.

Exercice 90. $\sum x_{kn} = 0$

Soit $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ une série absolument convergente telle que pour tout entier $k \geq 1$ on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{kn} = 0$.

Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 0$.

Exercice 91. *Césaro*

1) Soient $k, p \in \mathbb{N}$ avec $k \leq p$. Montrer que $\sum\limits_{n=k}^{p} \dfrac{C_n^k - C_n^{k+1}}{2^n} = \dfrac{C_{p+1}^{k+1}}{2^p}$.

2) Soit (u_n) une série convergente. On pose $v_n = \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p u_p$. Montrer que la série (v_n) est convergente.

Exercice 92. $nu_n > 0$

Soit (u_n) une série convergente à termes positifs décroissants.

1) Montrer que $nu_n - n \to \infty - > 0$.

2) Montrer que $\sum\limits_{u_k \geq 1/n} \dfrac{1}{u_k} = \mathrm{o}(n^2)$.

Exercice 93. u_n/R_n^p

Soit (a_n) une série positive convergente, $A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $R_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ et $p \in]0,1[$.

1) Montrer qu'il existe $C_p \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n^p} \leq C_p A^{1-p}$.

2) Trouver la meilleure constante C_p.

Exercice 94. $u_{n+1} = u_n + a_n/u_n$

Soit (a_n) une suite réelle positive et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$ avec $u_0 > 0$. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 95. *Raabe-Duhamel*

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$.

Exercice 96. *Stirling++*

Montrer que $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Exercice 97. *Développement factoriel*

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites croissantes d'entiers (q_i) telles que $q_0 \geq 2$.

1) Si $s = (q_i) \in \mathcal{S}$, montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_0 \cdots q_k}$ converge. On note $\Phi(s)$ sa somme.

2) Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow]0,1]$ est bijective.

3) Soit $s = (q_i) \in \mathcal{S}$. Montrer que $\Phi(s) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si s est stationnaire.

Exercice 98. *Développement asymptotique*

1) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + (1)$.

2) Prouver : $\frac{\ln 2}{2} - \int_{t=1}^{3} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leq C \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} - \int_{t=1}^{3} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) Prouver : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + \frac{\ln n}{2n} + \left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 99.

Soit (u_n) une suite de complexes telle que $\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - n \to \infty - > \ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{u_1}{1} + \cdots + \frac{u_n}{n}\right) - n \to \infty - > \ell$.

Exercice 100.

Soit (u_n) une suite de complexes qui converge au sens de Cesàro vers zéro.

Étudiez la suite de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+k+1}$.

Exercice 101. *Centrale MP 2000*

Soient deux suites de termes généraux u_n et v_n définies par la donnée de u_1 et v_1, tous deux réels, et les relations :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{v_n}{n(n+1)}, \qquad v_{n+1} = v_n + \frac{u_n}{n(n+1)}.$$

Montrer que ces suites sont définies et bornées.

Exercice 102. *Produits infinis, Polytechnique 2000*

On considère une suite (a_n) de réels et on définit $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1 + a_n)$ et $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.

1) On suppose que pour tout n, $a_n \geq 0$.

a) Montrer que, pour tout N, $1 + S_N \leq P_N \leq e^{S_N}$.

b) Comparer les convergences respectives des suites (S_N) et (P_N).

2) On suppose maintenant que pour tout n, $-1 \leq a_n \leq 0$.

a) La relation précédente est-elle encore vérifiée ?

b) Discuter de la convergence des suites (S_N) et (P_N).

3) On suppose que (a_n) est de signe quelconque et que pour tout n, $1 + a_n > 0$. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que (P_N) a une limite et que cette limite est nulle si et seulement si $\sum a_n^2$ diverge.

4) Complément. On suppose que la suite (a_n) est complexe, que pour tout n $|a_n| < 1$ et que la série $\sum |a_n|$ est convergente.

a) Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ existe, puis que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ existe $\Big($on pourra démontrer et utiliser l'inégalité $\Big|\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)-1\Big| \leq \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|)-1\Big)$.

b) Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ n'est pas nul.

Exercice 103. *Polytechnique MP 2002*

Trouver les fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall\, x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Exercice 104. *ENS Cachan MP* 2005*

Soit $P(n) = \max\{p \text{ premier}, p \mid n\}$. Montrer que $\sum_n \frac{1}{nP(n)}$ converge.

Exercice 105. *American Mathematical Monthly #110, January 2003 (NEW)*

On pose $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13}$... en remplaçant dans a_n chaque fraction $\frac{1}{d}$ par $\frac{1}{d+1} + \frac{1}{d^2+d+1}$.

1) Ecrire a_4.

2) Montrer que $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x < x$ pour $0 < x \leq 1$.

3) Montrer que $\arctan\left(\dfrac{1}{d+1}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{d^2+d+1}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{d}\right)$.

4) On écrit dorénavant $a_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i}$ avec $m = 2^{n-1}$. On a clairement $d_i \geq n$ pour tout i.

Montrer que

$$a_n\left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) < \sum_{i=1}^{m} \arctan\frac{1}{d_i} < a_n$$

5) Déterminer alors la limite de (a_n).

Solutions des exercices

Exercice 1.

On utilise l'encadrement $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$. On a alors $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

En sommant et par télescopage, on trouve $1+2\sqrt{10^4+1}-2\sqrt{2} < S < 1+2\sqrt{10^4}-2$, ce qui donne $\boxed{198} < S < 199$.

Exercice 2.

1) On a $|u_{n+1}| = u_n - u_{n+2}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |u_k| = |u_0| + u_0 + u_1 - u_n - u_{n+1}$. Ainsi, si la suite converge, la série est absolument convergente.

2) a) D'après ce qui vient d'être fait, elles ne peuvent converger que vers 0. En outre, $u_{n+2} \leq u_n$, donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont décroissantes, donc soit convergentes, soit tendant vers $-\infty$.

D'après la relation $|u_{n+1}| = u_n - u_{n+2}$, si (u_{2n}) converge, alors (u_{2n+1}) tend vers 0 et inversement. D'où, soit (u_n) tend vers 0, soit elle tend vers $-\infty$.

b) Comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont décroissantes, on a tous les termes qui sont positifs et la relation de récurrence devient $u_{n+2} = u_n - u_{n+1}$. Donc $u_n = \dfrac{a}{\phi^n} + b(-\phi)^n$ avec ϕ le nombre d'or. Pour que (u_n) converge, il faut que b soit nul et donc $\boxed{u_n = \dfrac{a}{\phi^n}}$.

Exercice 3.

1) En notant S_n les sommes partielles, on a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{8n} \longrightarrow \frac{1}{8}.$$

Donc elle diverge.

2) On ne peut rien dire. Si $\sigma(n) = n$, elle converge.

Si $\sigma(n) = \begin{cases} \lfloor n/2 \rfloor^2 & n \equiv 0\ (2) \\ \lfloor (n-1)/2 \rfloor^{\text{ième}} \text{ entier qui n'est pas un carré} & n \equiv 1\ (2) \end{cases}$, elle contient les termes $\dfrac{1}{8p}$ avec $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et est donc divergente.

Exercice 4.

1) Par récurrence en posant $k' = 2^{n+1} - k + 1$

3) c) Récurrence.

Exercice 5.

1) $\sim -\dfrac{e}{2n} \Rightarrow$ DV.

2) $\sim \dfrac{\alpha}{2^{\alpha-1}} e^{n(\alpha-2)} \Rightarrow$ CV ssi $\alpha < 2$.

3) $\sim -\dfrac{3}{n^2} \Rightarrow$ CV.

4) $\sim \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow$ CV.

5) $\sim \sqrt{\dfrac{2}{n^3}} \Rightarrow$ CV.

6) cv ssi $|a| \neq 1$.

7) Série alternée $\Rightarrow$ CV.

8) Série alternée $\Rightarrow$ CV.

9) Harmonique + alternée $\Rightarrow$ DV.

10) d'Alembert $\Rightarrow$ CV.
11) $\leq \dfrac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leq \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow$ CV.
12) $= \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1} + \left(\dfrac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ CV.
13) Décomposition en 3 séries alternées $\Rightarrow$ CV.
14) $= \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n} + (n^{-3/2}) \Rightarrow$ DV.
15) Regroupement de termes $\Rightarrow$ DV.
16) Regroupement par paquets + CSI $\Rightarrow$ CV.
17) $\not\longrightarrow 0 \Rightarrow$ DV.
18) $= \dfrac{1}{n^{\ln\ln n}} < \dfrac{1}{n^2}$ pour n assez grand. Donc elle est CV.
19) Converge par équivalent, puis télescopage.
20) DV grossièrement car $e^{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$.
21) CV D'alenbert : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \dfrac{1}{\ln n} \longrightarrow 0$.
22) $\sim \dfrac{(-1)^n}{n^n}$ qui CV par le CSA.
23) converge vers e.
24) diverge.
25) converge.
26) converge.
27) converge.
28) DV $\sim \dfrac{1}{n}$.
29) diverge.
30) Cauchy.
31) Cauchy.
32) d'Alembert.
33) d'Alembert.

Exercice 6.

1) $\dfrac{3}{4}$.
2) $\dfrac{1}{4}$.
3) $S_p - (p+1)S_{p+1} = S_p - \dfrac{1}{(p+1)!} \Rightarrow S_p = \dfrac{1}{pp!}$.
4) $\dfrac{23}{144}$.
5) $\ln 3$.
6) $-\ln 2$.
7) $\ln\left(\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.
8) $\dfrac{1}{\alpha} - 2\operatorname{cotan}(2\alpha)$.
9) $109 - 40e$.
10) $\dfrac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$ pour $|x|<1$ par récurrence.
11) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ si $|x|<1$, $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ si $|x|>1$.
12) $S_n = \displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{qn+r} - \frac{r}{qn+r+1}$.

$$S_n = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\cdots+\frac{1}{qn+n}-\frac{1}{q+1}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{(N+1)n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}\right) = \ln n.$$

13) On montre que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ et la somme converge par télescopage.

14) Dérivée double d'une somme géométrique.

15)

16) En faisant un DES, on trouve $\dfrac{k^2}{(k+1)!} = \dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{(k+1)!}$. Et par télescopage, $\Sigma = e-(e-1)+(e-2) = e-1$.

17) $\dfrac{n2^{2n+1}}{5^{n-1}} = 10n(\frac{4}{5})^n$. Donc $\Sigma = 10\dfrac{\frac{4}{5}}{(1-\frac{4}{5})^2} = 200$.

18) $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} = \dfrac{1}{p}\left[\dfrac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)} - \dfrac{1}{(n+2)\dots(n+p)}\right]$ et par télescopage, $\Sigma = \dfrac{1}{pp!}$

Exercice 7.

On utilise $\sqrt{u_n v_n} \le \dfrac{u_n+v_n}{2}$.

Exercice 8.

On écrit $n^3 = n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n$, d'où $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{P(k)}{k!} = \sum_{k=3}^{n}\dfrac{1}{(k-3)!} + \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{(k-2)!} + 2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ ce qui donne à la limite $5e$.

Remarque: D'une façon plus générale, pour calculer $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{P(k)}{k!}$, on écrit $P(X) = a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + \cdots + a_p n(n-1)\dots(n-p+1)$ et on trouve $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{P(k)}{k!} = \left(\sum_{j=0}^{p} a_j\right)e$.

Exercice 14.

• u_n et $v_n = 2^n u_{2^n}$: la suite étant décroissante, on trouve $\dfrac{1}{2}v_n \le u_n \le v_{n-1}$. D'où la convergence ou la divergence simultanée.

• u_n et $v_n = n^p u_{n^{p+1}}$: Par encadrement là encore :

$$((n+1)^{p+1}-n^{p+1})u_{(n+1)^{p+1}} \le \sum_{k=n^{p+1}}^{(n+1)^{p+1}-1} u_k \le ((n+1)^{p+1}-n^{p+1})u_{n^{p+1}}$$

Or $(n+1)^{p+1}-n^{p+1} = n^{p+1}\left((1+\frac{1}{n})^{p+1}-1\right) \sim (p+1)n^p \sim (p+1)(n+1)^p$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{n^p} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{(n+1)^p} = p+1$.

Il existe donc n_0 tel que $\forall n \ge n_0$, on ait $\dfrac{1}{2}(p+1) \le \dfrac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{(n+1)^p}$ et $\dfrac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{n^p} \le \dfrac{3}{2}(p+1)$. Ainsi,

$$\forall n \ge n_0, \quad \frac{p+1}{2}(n+1)^p \le (n+1)^{p+1}-n^{p+1} \le \frac{3(p+1)}{2}n^p$$

Donc on obtient :

$$\frac{p+1}{2}(n+1)^p u_{(n+1)^{p+1}} \le \sum_{k=n^{p+1}}^{(n+1)^{p+1}-1} u_k \le \frac{3(p+1)}{2}n^p u_{n^{p+1}}.$$

Les séries sont donc de même nature.

• u_n et $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$: On procède par encadrement en distinguant les cas où il y a cv ou dv. On a

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}x}{x+u_n} \leq \frac{u_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

et puisque (u_n) est décroissante, alors

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}x}{x+u_0} \leq \frac{u_n}{S_n} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

- Si la série de tg u_n diverge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ puisque $u_n \geq 0$. De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+u_0}$ minore $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{S_n}$. Or elle diverge.

- Si la série de tg u_n cv vers S, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{S_n} \leq \displaystyle\int_u^S \frac{\mathrm{d}x}{x}$ où u est le premier terme non nul. Ainsi, la série converge.

Exercice 15.

3) On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} k!}{n!} = 1$.

Exercice 16.

1) $a_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{8} + \frac{1}{57} + \frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{14} + \frac{1}{183}$.

4) $a_n \left(1 - \dfrac{1}{3n^2}\right) < \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{d_i} - \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{m} \left(\dfrac{1}{d_i}\right)^3 < \sum\limits_{i=1}^{m} \arctan\dfrac{1}{d_i} < \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{d_i}$

5) Par récurrence, on trouve $\sum\limits_{i=1}^{m} \arctan\dfrac{1}{d_i} = \arctan(a_1) = \dfrac{\pi}{4}$. D'où,

$$\frac{\pi}{4} < a_n < \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right)^{-1} \frac{\pi}{4}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 17.

1) La suite u_n est bien définie car $x \longmapsto \dfrac{\sin^n x}{\cos x}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{3}]$. On trouve $u_1 = [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2$.

2) a) On trouve $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)dx = \left[\frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

b) On obtient $u_{n+2} - u_n = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)dx = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$. Ce qui donne $u_3 = \ln 2 - \dfrac{3}{8}$.

3) On a $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)(\sin x - 1)}{\cos x}dx \leq 0$. Donc (u_n) est décroissante. La suite est décroissante et positive donc minorée ; ainsi, elle converge.

4) a) Comme la fonction sin est croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{3}]$, on peut prendre $K = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Comme la fonction $t \longmapsto t^n$ est croissante sur $[0, +\infty[$, on l'encadrement $0 \leq \sin^n x \leq (\frac{\sqrt{3}}{2})^n$. Avec $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$, on trouve

$$0 \leq \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)} \leq 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

et en intégrant avec les bornes croissantes, on obtient $\boxed{0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}$. D'où par encadrement ($|\frac{\sqrt{3}}{2}| < 1$), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5) a) On utilise le critère de comparaison avec la série géométrique convergente de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc elle converge.

b) Par linéarité, puis par la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^k x}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)}dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x(1-sinx)}dx.$$

c) Sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{3}]$, on majore $\frac{1}{1-\sin x)} \leq \frac{2}{2-\sqrt{3}}$. Donc

$$0 \leq \frac{\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)} \leq \frac{2}{2-\sqrt{3}}\frac{\sin^n x}{\cos x}$$

et en intégrant,

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)}dx \leq \frac{2}{2-\sqrt{3}}u_n.$$

Par encadrement, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)}dx = 0$ et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x(1-\sin x)}}.$$

d) On peut effectuer le changement de variable car la fonction sin est $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle considéré. On trouve

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u^2)(1-u)} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u)^2)(1+u)}.$$

e) On trouve

$$\frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{\frac{1}{4}}{1-u} + \frac{\frac{1}{4}}{1+u} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-u)^2}.$$

Donc

$$S = \frac{1}{4}\left[-\ln|1-u| + \ln|1+u| + \frac{2}{1-u}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{6+4\sqrt{3}+\ln(7+4\sqrt{3})}{4}}.$$

Exercice 18.

$u_n = \frac{1}{n}(a-(-1)^n\sqrt{n})\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$.

On fait un DL : $u_n = \left(\frac{a}{n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{a-1}{n} + \frac{a+(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}} + \frac{\varepsilon}{n\sqrt{n}}$.

Les facteurs $\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ et $\frac{a+(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ ne posent pas de problèmes (série alternée cv et série cv par comparaison avec Riemann). Il ne reste que $\frac{a-1}{n}$ qui converge si et seulement si $a=1$.

En résumé, la série converge si $a=1$ et diverge si $a\neq 1$.

Exercice 19.

On fait un DL : $u_n = \ln n + a(\ln n + ln(1+\frac{1}{n})) + b(\ln n + \ln(1+\frac{2}{n})) = (1+a+b)\ln n + \frac{1}{n}(a+2b) - \frac{1}{n^2}(\frac{a}{2}+b) + \frac{\varepsilon}{n^2}$.

Pour avoir convergence, on doit avoir $1+a+b=0$ et $a+2b=0$. Donc $(a,b)=(-2,1)$.

Exercice 20.

On procède par comparaison avec une intégrale :

$$2\sqrt{n} = \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Pour la série, on a $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}) \sim \frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}}$. Donc, la série converge.

Exercice 21.

• On montre déjà la convergence : Etonnamment, la série est alternée car $\frac{t\sin t}{1+t^2}$ est alternativement positive et négative sur $[2n\pi,(2n+1)\pi]$ puis sur $[(2n-1)\pi,2n\pi]$. Il reste à prouver que la suite est décroissante en valeur absolue :

$$|u_n| = \left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| = \frac{\xi}{1+\xi^2}\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin t\mathrm{d}t\right| = \frac{2\xi}{1+\xi^2}$$

en utilisant la première formule de la moyenne. La fonction sin étant de signe constant sur $[(n-1)\pi,n\pi]$ et $g: x\longmapsto \frac{x}{1+x^2}$ étant continue et décroissante pour $x>1$, alors $|u_{n+1}|\leq |u_n|$.

De plus, la relation trouvée donne $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$. Donc la série de terme général u_n converge.

• Pour l'absolue convergence, $|u_n| = \frac{2\xi}{1+\xi^2}$ avec $](n-1)\pi,n\pi[$. Donc $|u_n| > \frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2} \sim \frac{2}{n\pi}$ et donc la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Exercice 22.

• On montre déjà la convergence : La série est alternée mais ce n'est pas facile à voir : En effet, en utilisant $e = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$, on peut écrire :

$$u_n = \sin\left(n!\pi[1+\tfrac{1}{1!}+\cdots+\tfrac{1}{n!}+\tfrac{1}{(n+1)!}+\tfrac{\theta}{(n+2)!}\right)$$

avec $\theta = 1+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\ldots$. Ainsi,

$$u_n = \sin\left(n![1+dots+\tfrac{1}{n!}]\pi+\tfrac{\pi}{n+1}+\tfrac{\theta\pi}{(n+1)(n+2)}\right) = (-1)^{n!(1+\cdots+\frac{1}{n!})}\sin\left(\tfrac{\pi}{n+1}+\tfrac{\theta\pi}{(n+1)(n+2)}\right).$$

En outre, $n!(1+\cdots+\frac{1}{n!})$ a la même parité que $n+1$. Donc $u_n = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}+\frac{\theta\pi}{(n+1)(n+2)}\right)$ et la suite est alternée.

Pour la décroissance, on voit que $\frac{\theta}{(n+1)(n+2)}$ est le reste de la série de terme général $\frac{1}{n!}$ qui est convergente, donc il est décroissant. Donc $\frac{\pi}{n+1}+\frac{\theta\pi}{(n+1)(n+2)}$ décroît vers 0. Donc $|u_n|\longrightarrow 0$.

On a montré que la série de terme général u_n est convergente.

• En revanche, $|u_n| \sim \frac{\pi}{n}$ qui donne la divergence absolue.

Exercice 23.

On a $\tan u_n = \dfrac{\frac{n+1}{n-1} - 1}{1 + \frac{n+1}{n-1}} = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u_n = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{n} + k\pi$. Or $\lim\limits_{n\to+infty} u_n = 0$, donc $k = 0$ et $u_n = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$. Et la série de terme général u_n diverge.

En revanche, v_n est alternée et $|v_n| = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{n}$ est décroissante vers 0. Ainsi la série de terme général v_n converge.

Exercice 24.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{(2n+1)2n}} + \dfrac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} - \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \dfrac{k}{n^{\frac{3}{2}}}$. Et on peut voir par télescopage u_n comme somme partielle d'ordre n d'une série convergente.

Par l'encadrement, $\dfrac{1}{n+k+1} < \dfrac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} < \dfrac{1}{n+k}$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq u_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

Les deux sommes ont pour limite $\ln 2$ en tant que somme de Riemann. Donc par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2}$.

Exercice 25.

1) On a $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x \leq e \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{e}{n+1}$. Par encadrement, $u_n \longrightarrow 0$.

Pour la série, on a $(n+1)u_n = \displaystyle\int_n^1 (n+1)x^n e^x \mathrm{d}x = e - u_{n+1}$ par IPP. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $(n+1)u_n \sim e \quad \Leftrightarrow \quad u_n \sim \dfrac{e}{n+1}$. La série est donc divergente.

2) De la même manière, $(n+1)u_n = f(1) - \displaystyle\int_0^1 f'(x)x^{n+1}\mathrm{d}x$

• Si $f(1) \neq 0$, comme $|f'(x)|$ est majorée sur le compact $[0,1]$, alors $u_n \sim \dfrac{f(1)}{n+1}$ et la série diverge.

• Si $f(1) = 0$, alors $(n+1)u_n = -v_{n+1}$.

- Si $f'(1) \neq 0$, alors $v_n \sim \dfrac{f'(1)}{n+1}$ et donc $u_n \sim \dfrac{-f'(1)}{n^2}$ et la série converge.
- Si $f'(1) = 0$, alors $v_n \leq \dfrac{1}{n}$ et $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ et la série converge encore.

Exercice 26.

On a $a_n = S_{n+1} - S_n$ en utilisant les sommes partielles. Or $\forall n$, $a_n < \dfrac{S_n}{n^2}$, donc $S_{n+1} < S_n(1 + \frac{1}{n^2})$. On en déduit $S_{n+1} < \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + \tfrac{1}{k^2})S_1$. On clairement (S_n) croissante. Il suffit de montrer qu'elle est majorée. En remarquant que $S_1 = a_0$, alors

$$\ln S_{n+1} < \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \tfrac{1}{k^2}) + \ln a_0 < \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k^2} + \ln a_0 < \frac{\pi^2}{6} + \ln a_0.$$

Ainsi, (S_n) converge.

Exercice 27.

Il faut d'abord voir qu'elle est croissante. Pour cela, on utilise $((\dots(((u_n^2-a_0)^2-a_1)^2-a_2)^2\dots)^2-a_n)^2=0$ et $((\dots(((u_{n+1}^2-a_0)^2-a_1)^2-a_2)^2\dots)^2-a_n)^2=a_{n+1}$. Donc $u_{n+1}\geq u_n$.

On démontre ensuite qu'elle est majorée. En fait $u_n\leq\sqrt{3+\sqrt{9+\sqrt{9+\sqrt{9+\sqrt{9+\dots\sqrt{9}}}}}}$.

Il est clair (v_n) est croissante avec la même astuce que précédemment. En outre, $v_{n+1}=\sqrt{9+v_n}$, donc $v_{n+1}^2-v_n=v_n-v_{n-1}$. Ainsi, $v_{n+1}-v_n=\dfrac{v_n-v_{n-1}}{v_{n+1}+v_n}$ et comme $v_k\geq 3$, alors $v_{n+1}-v_n\leq\dfrac{1}{6}(v_n-v_{n-1})$. On considère alors (v_n) comme la somme partielle d'ordre n de la série positive de terme général $w_n=v_n-v_{n-1}$.

Or $w_{n+1}\leq\dfrac{1}{6}w_n\leq\dfrac{1}{6^n}w_1$. Donc la série converge et (v_n) aussi. (sa limite vérifie $\ell^2=9+\ell$ avec $l\geq 0$). La suite (u_n) est donc majorée et comme elle est croissante, elle converge.

Exercice 28.

1) On écrit

$$|v_n-\ell|=\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}u_ka_k}{\sum_{k=1}^{n}u_k}-\ell\right|=\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}u_k(a_k-\ell)}{\sum_{k=1}^{n}u_k}\right|.$$

Mais par définition de la limite de (u_n), $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_1$, $n\geq n_1\ \Rightarrow\ |a_n-\ell|\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Donc

$$|v_n-\ell|\leq\frac{\sum_{k=1}^{n_1}u_k|a_k-\ell|}{\sum_{k=1}^{n}u_k}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\sum_{k=n_1+1}^{n}u_k(a_k-\ell)}{\sum_{k=1}^{n}u_k}\leq\frac{\sum_{k=1}^{n_1}u_k|a_k-\ell|}{\sum_{k=1}^{n}u_k}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, la série de terme général u_n est divergente, donc il existe n_2 tel que $n\geq n_2\ \Rightarrow\ \dfrac{\sum_{k=1}^{n_1}u_k|a_k-\ell|}{\sum_{k=1}^{n}u_k}\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$. Il ne reste plus qu'à poser $n_0=\max(n_1,n_2)$ pour assure que $|v_n-\ell|\leq\varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$.

2) On prend $u_n=1$ et $a_n=\sin\frac{1}{n}$ et la limite est 0.

Exercice 29.

1) Si $\alpha=0$, alors $v_n=u_n$ et la série converge.

Si $\alpha=1$, alors $v_n=\dfrac{u_n}{R_n}$. Deux cas se présentent :

- Si $v_n\not\longrightarrow 0$ alors la série de terme général v_n diverge.
- Si $v_n\longrightarrow 0$, alors $v_n\sim\ln(1+\frac{u_n}{R_n})$. Donc $v_n\sim\ln\frac{R_{n-1}}{R_n}=w_n$. Les deux séries en v_n et en w_n ont la même nature. Or $w_1+\dots+w_n=\ln R_0-\ln R_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n=0$, alors la série de terme général w_n est divergente et celle que l'on étudie en v_n aussi.

2) Si $\alpha>1$, alors $R_n<1$ à partir d'un certain rang, donc $v_n=\frac{u_n}{(R_n)^\alpha}>\frac{u_n}{R_n}$ et la série de terme général v_n diverge.

Si $\alpha<0$, alors $\frac{v_n}{u_n}=(R_n)^{-\alpha}$ tend vers 0, donc la convergence de u_n entraîne celle de v_n.

Exercice 30.

Formule de Stirling : $\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k = \frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n} + \cdots + \ln\frac{k}{n} + \cdots + \ln 1 + n\ln n) = \frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n} + \cdots + \ln\frac{n-1}{n} + \ln 1) + \ln n$. Or la somme de Reimann $\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n}) \longrightarrow \int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = [x\ln x - x]_0^1 = -1$. Donc $\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sim -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{n!} \sim \frac{e}{n}$.

Convergence de la série : $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{(2n)^n} = \dfrac{(2n)!}{(2n)^n n!} \sim \dfrac{(\frac{2n}{e})^{2n}}{(2n)^n(\frac{n}{e})} \sim (\frac{2}{e})^n$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{2}{e} < 1$ qui converge.

Exercice 31.

$P(n) = n^3 + \frac{3}{4}n + C$.

Exercice 32.

$= \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + \left(\dfrac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ converge.

Exercice 33.

On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\sin\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{3(n+1)^2}(1+\varepsilon)$.

On utilise le critère de Duhamel : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim 1 - \frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon)$ donne la convergence si $\alpha > 1$. Ici, il y a divergence.

Exercice 34.

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \dfrac{1}{2n^{3\alpha/2}} + \left(\dfrac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$, il y a convergence ssi $\alpha > \frac{2}{3}$.

Exercice 35.

Effectuer un développement asymptotique pour les deux premières. Elles convergent si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. La troisième diverge par comparaison série-intégrale.

Exercice 36.

$\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n-1}} - n \to \infty -> ab$ et $\dfrac{u_{2n}}{u_{2n-2}} - n \to \infty -> ab$ donc il y a convergence si $|ab| < 1$.

Exercice 38.

$n = 21$, $S \approx 0.65314389$.

Exercice 39.

$1 \Rightarrow 2$ par comparaison série-intégrale. Contre-exemple pour $2 \not\Longrightarrow 1$: $u_n = e^{(n+1)^2} - e^{n^2}$, $S_n = e^{(n+1)^2} - 1$, $f(t) = \dfrac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$.

Exercice 40.

$\dfrac{n^2}{(n^2+1)^2} - \dfrac{1}{n^2-1} = -\dfrac{3n^2+1}{(n^2+1)^2(n^2-1)} \geq -\dfrac{4}{n^4}$ pour $n \geq 3$.

Donc $S = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{n^2}{(n^2+1)^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1} + R_N$ avec $-\dfrac{4}{3N^3} \leq R_N \leq 0$ et $\sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{N+\frac{1}{2}}{N(N+1)}$.

Pour $N = 25$ on obtient : $0.76981 < S < 0.76990$.

Exercice 42.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $n^2 u_n - n \to \infty -> \infty$ donc $u_n v_n \sim 1/n^2$. Alors les suites $(\sqrt{u_n})$ et $(\sqrt{v_n})$ sont de carrés sommables tandis que la suite $(\sqrt{u_n v_n})$ n'est pas sommable, c'est absurde.

Si $\sum u_n$ diverge on ne peut rien dire : avec $u_n = 1$ on a $\sum v_n$ convergente tandis qu'avec $u_n = \dfrac{1}{n}$ on a $\sum v_n$ divergente.

Exercice 43.

1) $u_1 + \cdots + u_n = 1 - \dfrac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_n)} \leq 1$.

2) $\ln\big((1+a_1)\dots(1+a_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) - n \to \infty - > +\infty \Rightarrow \sum u_n = 1$.

Exercice 44.

Regroupement de termes par valeur constante de $p_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^{p_k}} = \sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{10^{p+1} - 10^p}{a^p} = \dfrac{90}{a-10}$.

Exercice 46.

2) $|v_n| = (n^{-3/2}) \Rightarrow$ CV.

Exercice 47.

Série alternée.

Exercice 48.

Si $n+1$ n'est pas un carré alors $u_n = 0$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=2}^{\infty} u_{k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 49.

1) $y = e^{-x}(a\cos x + b\sin x)$, $y = e^{-x}\sin x + e^{-2x}(cx+d)$.

2) $u_n = \dfrac{(-1)^n e^{-n\pi}(e^{\pi}+1)}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 50.

$\dfrac{\pi^2}{3} - 3$.

Exercice 51.

$\dfrac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2} = \dfrac{6}{k} + \dfrac{6}{k+1} - \dfrac{24}{2k+1} \Rightarrow s_n = 18 - 24 \sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} + \dfrac{6}{n+1} - n \to \infty - > 18 - 24\ln 2$.

Exercice 52.

$\begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a=-2,\ b=1,\ S=-\ln 2.$

Exercice 53.

$\tan s_n = n+1$ par récurrence et $s_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+k+1} \leq 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 2$.

Exercice 54.

1) $\sim \dfrac{a}{n^2}$.

2) $S(a) \geq \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+a) - \arctan k - a \to +\infty - > \dfrac{\pi}{2} + \arctan 1 + \arctan\dfrac{1}{2} + \cdots + \arctan\dfrac{1}{n} \Rightarrow S(a) - a \to +\infty - > +\infty$.

Exercice 55.

Le déport maximal entre la première pièce et la dernière pour une pile de n pièces est $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2(n-1)}$ (en diamètre d'une pièce). Il dépasse 1 pour $n > 4$.

Exercice 56.
1) $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.
2) $\ln(\ln n)$.

Exercice 57.
$u_n \sim n\ln^2 n \Rightarrow$ CV.

Exercice 58.
2997.

Exercice 59.
$\sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

Exercice 61.
$T_{n+1}-T_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_{t=n}^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} < 0$
$S_{n+1}-S_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n+1} - \ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_{t=n}^{n+1} \Big(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2}\Big)\,\mathrm{d}t > 0.$

Exercice 62.
$\dfrac{u_{n,k}}{k} = \dfrac{n}{k} - \big[\dfrac{n}{k}\big]$, donc $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{u_{n,k}}{k}$ est une somme de Riemann pour l'intégrale $I = \displaystyle\int_{t=0}^{1} \Big(\dfrac{1}{t} - \big[\dfrac{1}{t}\big]\Big)\,\mathrm{d}t$. La fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{t} - \big[\dfrac{1}{t}\big]$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$, donc $v_n - n \to \infty -> I$.

Calcul de I : $I_n = \displaystyle\int_{t=1/n}^{1} \Big(\dfrac{1}{t} - \big[\dfrac{1}{t}\big]\Big)\,\mathrm{d}t = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \int_{t=\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k\,\mathrm{d}t = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} - n \to \infty -> 1-\gamma = I.$

Exercice 63.
1) Comparaison série-intégrale : $u_n \sim \dfrac{\ln^2 n}{2}$.
2) Comparaison série-intégrale encore (v_n est la somme des aires entre les rectangles aux points entiers et la courbe de $t > \ln(t)/t$).
3) $v_n - \ell = -\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \Big(\int_{t=k}^{k+1} \dfrac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t - \dfrac{\ln(k+1)}{k+1}\Big) = -\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ avec $w_k \sim \dfrac{\ln k}{2k^2}$ donc $v_n - \ell \sim -\displaystyle\int_{t=n}^{+\infty} \dfrac{\ln t}{2t^2}\,\mathrm{d}t \sim -\dfrac{\ln n}{2n}$.

Exercice 64.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{n^2-k^2} = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\dfrac{1}{n-k} + \dfrac{1}{n+k}\Big) = \dfrac{1}{2n}\Big(\sum_{k=1}^{2n-1} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n}\Big) \sim \dfrac{\ln n}{2n}$.

Exercice 65.
5) $S_n + \dfrac{1}{\ln(n+1)} \le S \le S_n + \dfrac{1}{\ln n}$. Pour $n = 60$: $2.06857 < S < 2.06956$.

Exercice 67.
Si $u_n > 0$, alors $v_n \sim u_n$; sinon, $v_n \not\to 0$.

Exercice 68.
2) $\dfrac{r}{(1-r)^2}$.

Exercice 69.

2) c) On commence par exprimer $u_{n+1}-u_n$ en fonction de n et on utilise l'inégalité précédente.

Exercice 70.

On remarque déjà que $\sum u_i$ diverge car $u_n \sim \dfrac{U_n}{n\alpha} \geq \dfrac{U_1}{n\alpha}$. On calcule $\sum_{k=0}^{n} ku_k$ par parties :

$$\sum_{k=0}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k-1}) = nU_n - \sum_{k=0}^{n} U_k$$

Comme $U_n \sim \alpha n u_n$, terme général strictement positif d'une série divergente, on a $\sum_{k=0}^{n} U_k \sim \alpha \sum_{k=0}^{n} ku_k$ d'où : $(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n} ku_k \sim nU_n$ et :

$$\frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=0}^{n} ku_k \sim \frac{nU_n}{(1+\alpha)n^2 u_n} - n \to \infty - > \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Exercice 71.

$S_n = \sum_{k=0}^{n} ku_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{S_k}{k(k+1)} - S_0 + \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 72.

3) $kr^k = k(u_k - u_{k+1})$ avec $u_k = \dfrac{r^k}{1-r}$ donc $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{r^k}{1-r} = \dfrac{r}{(1-r)^2}$.

De même, $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} kr^k = \dfrac{(n-1)r^n}{1-r} + \sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{r^k}{1-r} = \dfrac{nr^n}{1-r} + \dfrac{r^{n+1}}{(1-r)^2}$.

$k^2 r^k = k(S_k - S_{k+1})$ et (S_k) décroît d'où $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k = \sum_{k=1}^{\infty} S(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{kr^k}{1-r} + \dfrac{r^{k+1}}{(1-r)^2}\right) = \dfrac{r+r^2}{(1-r)^3}$.

Exercice 73.

2) $p_n = \dfrac{u_0}{S_n} > 0$ donc la série de terme général $\ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.

Exercice 74.

Méthode des rectangles : $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}} \geq \displaystyle\int_{t=a_{n+1}}^{a_0} \frac{\mathrm{d}t}{t} - k \to \infty - > +\infty$.

Si $a_k \sim a_{k+1}$ la série donnée diverge donc. Sinon, elle diverge aussi car son terme général ne tend pas vers 0.

Exercice 75.

$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{2N-1} u_k \sum_{k/2<n\leq k} \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N-1} u_k \leq \sum_{n=1}^{N} v_n \leq 2\sum_{k=1}^{2N-1} u_k$.

Exercice 76.

$\sum_{k=1}^{n} v_k + nv_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge aussi (SP majorées) et $nv_n > \ell \Rightarrow \ell = 0$.

Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge, alors $nv_n > +\infty$, contradiction.

Exercice 77.

$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} ku_k \sum_{p=k}^{n} \frac{1}{p^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{ku_k}{k-1} \Rightarrow$ CV.

Exercice 78.

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} v_k \leq \sum_{k=1}^{2^{n+1}} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 79.

Pour $n > 2$, $u_{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $u_{n+2} > \frac{1}{(n+1)e^{1/n}} \sim \frac{1}{n}$ donc la série diverge.

Exercice 82.

2) $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(1 + \frac{a-b+1}{n+b-1}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } a-b+1 > 0, v_n > +\infty \\ \text{si } a-b+1 = 0, v_n = \text{cste} \\ \text{si } a-b+1 < 0, v_n > 0. \end{cases}$

3) $(n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n = 0 \Rightarrow (n+b)u_{n+1} + (b-a-1)\sum_{k=1}^{n} u_k - au_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \frac{(b-1)u_0}{b-a-1}$.

Exercice 83.

La suite (u_n) est croissante donc tend vers $\ell \in]0, +\infty]$. On a ℓ fini si et seulement si la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n) = \sum \frac{1}{n^a u_n}$ est convergente, soit si et seulement si $a > 1$.

Pour $a < 1$ on a $u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{2}{n^a} + \left(\frac{2}{n^a}\right)$ donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 \sim \frac{2}{n^a}$ et $u_n \sim \sqrt{\frac{2n^{1-a}}{1-a}}$ (sommation des relations de comparaison).

Pour $a = 1$ on a de même $u_n \sim \sqrt{2\ln n}$.

Exercice 84.

$\alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n$ cv et vaut $\zeta(\alpha)^2$.

$\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{2N} u_n \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \Rightarrow \sum u_n$ dv.

Exercice 86.

$\frac{a}{(1-a)^2}$ et $\frac{a+a^2}{(1-a)^3}$.

Exercice 88.

1) Césaro.

2) $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) - v_n$.

Exercice 89.

$|a_n| \leq M \Rightarrow \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}\right| \leq M \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq M \int_{t=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p} = \frac{M}{p-1} \Rightarrow a_1 = 0.$

Exercice 90.

Démonstration pour x_1 : $\sum x_n = 0$, $\sum x_{2n} = 0 \Rightarrow \sum_{n \text{ impair}} x_n = 0$. On retire les multiples impairs de 3 ($\sum x_{3n} - \sum x_{6n} = 0$) $\Rightarrow \sum_{\substack{n \not\equiv 0[3] \\ n \not\equiv 0[2]}} x_n = 0$. On retire les multiples restants de $5, 7, \ldots$ On obtient ainsi une suite $(s_p)_{p \text{ premier}}$ nulle qui converge vers x_1, donc $x_1 = 0$.

Peut-on se passer de la convergence absolue ?

Exercice 91.

1) récurrence sur p.

2) Transformation d'Abel et interversion de sommations : $\sum_{n=0}^{p} v_n = \sum_{k=0}^{p} \frac{C_{p+1}^{k+1}}{2^p} \sum_{n=0}^{k} u_n$.

Thm de Césaro $\Rightarrow \sum v_n = 2 \sum u_n$.

Exercice 92.

1) $nu_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, $nu_{2n+1} \leq \sum_{k=n+2}^{2n+1} u_k$.

2) $\varepsilon > 0$: Pour k suffisamment grand, $u_k \leq \frac{\varepsilon}{k}$, donc $u_k \geq \frac{1}{n} \Rightarrow k \leq n\varepsilon$. Alors $\sum_{u_k \geq 1/n} \frac{1}{u_k} \leq n^2\varepsilon + Kn$.

Exercice 93.

1) TAF : $\exists\, x_n \in [R_{n+1}, R_n]$ tq $R_n^{1-p} - R_{n+1}^{1-p} = (1-p)\frac{R_n - R_{n+1}}{x_n^p} \geq (1-p)\frac{a_n}{R_n^p}$. Donc, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} \leq \frac{A^{1-p}}{1-p}$.

2) C'est $\frac{1}{1-p}$: Pour $a_n = k^n$, $A^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} = \frac{1-k}{1-k^{1-p}} - k \to 1^- -> \frac{1}{1-p}$.

Exercice 94.

(u_n) est croissante. Si la suite (u_n) converge alors $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n) \leq M(u_{n+1} - u_n)$ donc les sommes partielles de $\sum a_n$ sont bornées.

Si $\sum a_n$ converge, alors $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \leq \frac{a_n}{u_0}$ donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Exercice 99.

Transformaton d'Abel.

Exercice 100.

Transformation d'Abel + découpage, $v_n - n \to \infty - > 0$.

Exercice 101.

$|u_n| + |v_n| \leq (|u_1| + |v_1|) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)$ et le produit infini est trivialement convergent.

Exercice 102.

2) a) $1 + S_N \leq P_N$ n'est plus triviale mais reste vraie par récurrence (la différence est une fonction décroissante de a_1).

3) La suite $(P_N e^{-S_N})$ est positive décroissante donc converge, ce qui entraîne la convergence de (P_N). On a $P_N - N \to \infty - > 0$ ssi $P_N e^{-S_N} - N \to \infty - > 0$ soit ssi la série de terme général $\ln(1 + a_n) - a_n \sim -\frac{a_n^2}{2}$ diverge.

4) a) Démontrer l'inégalité en développant les deux membres. Sachant que la suite (P_N) est bornée on en déduit qu'elle est de Cauchy donc converge.

Exercice 103.

On a $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}}$. Soit $a \in [0, 1[$ et M_a, m_a le maximum et le minimum de f sur $[0, a]$. D'après la relation précédente, $m_a \geq m_{a^2}$ et $M_a \leq M_{a^2}$ donc en fait $m_a = m_{a^2}$ et $M_a = M_{a^2}$.

On en déduit $f([0, a]) = f([0, a^2]) = \cdots = f([0, a^{2^k}]) = \cdots = \{f(0)\}$. Donc f est constante et réciproquement les fonctions constantes conviennent.

Exercice 104.

Soit $(p_0, p_1, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers et $S_k = \sum_{P(n)\leq k} \frac{1}{n}$. On a $S_k = S_{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^i} = \frac{p_k}{p_k - 1} S_{k-1}$, ce qui prouve que S_k est fini. La série demandée est $\frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k - S_{k-1}}{p_k} = \frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{p_k^2}$.

Montrons que $S_k \leq 2\sqrt{p_k}$, ceci prouvera la convergence. C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$, et si c'est vrai pour $k-1$ avec $k \geq 2$ alors on obtient $S_k \leq 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k p_{k-1}}{(p_k-1)^2}} \leq 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k(p_k-2)}{(p_k-1)^2}} \leq 2\sqrt{p_k}$.

Remarque : on a en réalité $S_k \sim e^{\gamma} \ln(p_k)$ où γ est la constante d'Euler (formule de Mertens).

Exercice 105.

1) $a_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{8} + \frac{1}{57} + \frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{14} + \frac{1}{183}$.

4) $a_n \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{d_i}\right)^3 < \sum_{i=1}^{m} \arctan \frac{1}{d_i} < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i}$

5) Par récurrence, on trouve $\sum_{i=1}^{m} \arctan \frac{1}{d_i} = \arctan(a_1) = \frac{\pi}{4}$. D'où,

$$\frac{\pi}{4} < a_n < \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right)^{-1} \frac{\pi}{4}$$

et $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$.