#202

Barycentres

Khôlles - Classes prépa Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. *Équation barycentrique d'une droite*

Soit (A, B, C) une base affine de $\mathcal{E}_2$, et M, M', M'' trois points de coordonnées barycentriques (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$.

Montrer que M, M', M'' sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 2. *Points dans l'espace*

Dans l'espace, les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en O, $O \notin (ABC)$ et A, B, C non alignés. Soient G, G' les isobarycentres des triangles ABC, $A'B'C'$. CNS pour que O, G, G' soient alignés ?

Exercice 3. *Polygone des milieux*

Soit $P = A_1A_2 \dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2 \dots A'_{n-1}A'_n$ où A'_i est le milieu de A_i et A_{i+1} $(A_{n+1} = A_1)$.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini. (Écrire un sommet de P_k comme barycentre de $A_1, \dots, A_n$)

Exercice 4. *Isobarycentre de tous les points sauf un*

Soit $P = A_1A_2 \dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2 \dots A'_n$ où A'_i est l'isobarycentre de tous les sommets sauf A_i.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.

Exercice 5. *Suite récurrente*

Soient A_0, A_1, A_2 trois points donnés. On considère la suite (A_k) de points vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall\ k \geq 3,\ \ A_k = \mathrm{Bar}(A_{k-1} : 1, A_{k-2}, 1, A_{k-3} : 2).$$

Étudier la convergence de cette suite.

Solutions des exercices

Exercice 2.
Repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \Rightarrow$ les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles.

Exercice 3.
$A_i^{(k)} = \text{Bar}\left(A_j : \dfrac{1}{2^k} \sum_{l \equiv j\ [n]} C_k^{|l-i|}\right)$.

Exercice 4.
$\overrightarrow{GA_i^{(k+1)}} = -\dfrac{1}{n-1}\overrightarrow{GA_i^{(k)}}$.

Exercice 5.
$A_k = \text{Bar}(A_0 : \alpha_k, A_1 : \beta_k, A_2 : \gamma_k)$ où α_k, β_k, γ_k vérifient : $x_k = x_{k-1} + x_{k-2} + 2x_{k-3}$.
Les racines de l'équation caractéristique sont $2, j, j^2$, donc $x_k \sim \lambda 2^k$ avec $\lambda = \dfrac{x_0 + x_1 + x_2}{7} = \dfrac{1}{7}$.
Donc $\alpha_k \sim \beta_k \sim \gamma_k$, et $A_k > G$, isobarycentre de $A_0A_1A_2$.