#208

Enveloppes

 Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. *Esem 91*
Soit $\mathscr{C}$ le cercle : $x^2 + y^2 = 1$. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'angle polaire θ et D_θ la droite passant par M d'angle polaire 2θ. Trouver l'enveloppe des droites D_θ.

Exercice 2. *Ensi Physique 93*
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et S un point du plan différent de O. Donner l'enveloppe des normales en M à (SM) lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

Exercice 3. *Cordes sur une parabole*
Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Chercher l'enveloppe des cordes $[A, B]$ de $\mathcal{P}$ de hauteur $h > 0$ donnée.

Exercice 4. *Cordes sur une parabole*
Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Pour $A, B \in \mathcal{P}$ distincts, on note C le point d'intersection des tangentes en A et B. Trouver l'enveloppe des droites (AB) lorsque l'aire du triangle ABC reste constante.

Exercice 5. *Cordes sur une parabole*
Soient M, M' deux points d'une parabole $\mathcal{P}$ tels que (MM') passe par le foyer F. Quels sont :
1) L'enveloppe des droites (MM') ?
2) Le lieu des milieux des segments $[M, M']$?
3) L'enveloppe des médiatrices de $[M, M']$?

Exercice 6. *Rayons réfléchis sur une parabole*
Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.
1) Un rayon incident arrive suivant une parallèle à Ox et se réfléchit à "l'intérieur" de $\mathcal{P}$ avec le même angle. Trouver l'enveloppe des rayons réfléchis.
2) Même question, mais le rayon incident est parallèle à Oy.

Exercice 7. *Cercle osculateur à une parabole*
Soit $\mathcal{P}$ une parabole, $M \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ le cercle osculateur à $\mathcal{P}$ en M. Montrer que, sauf cas particulier, $\mathcal{C}$ recoupe $\mathcal{P}$ en un deuxième point P. Déterminer l'enveloppe des droites (MP).

Exercice 8. *Cordes d'une hyperbole*
Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F. Trouver l'enveloppe des cordes $[P, Q]$ de $\mathcal{H}$ vues depuis F sous un angle droit.

Exercice 9. *Cardioïde*
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$. Chercher l'enveloppe des droites $D_\theta = (A_\theta\ A_{2\theta})$.

Exercice 10. *Cycloïde*
Chercher l'enveloppe d'un diamètre Δ d'un cercle $\mathcal{C}$ roulant sans glisser sur une droite D. Comparer le point caractéristique à la projection orthogonale du point de contact I sur Δ.

Exercice 11. *Hypocycloïde*
Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par O centré sur Ox. Pour $M \in \mathcal{C}$, on note D_M la droite symétrique de (OM) par rapport à l'horizontale passant par M. Déterminer l'enveloppe des droites D_M et la construire.

Exercice 12. *Cordes de $\rho = a/\cos(3\theta)$*

Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{a}{\cos 3\theta}$, $a > 0$. Chercher l'enveloppe des cordes vues de O sous un angle droit.

Exercice 13. *Perpendiculaire à OM sur une ellipse*

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, de paramètres a et b. Pour $M \in \mathcal{E}$, soit D la perpendiculaire en M à (OM).

1) Donner les équations paramétriques de l'enveloppe des droites D.
2) Tracer les enveloppes sur ordinateur pour différentes valeurs de a/b.
3) Étudier les points stationnaires de l'enveloppe quand il y en a.

Exercice 14. *$AM \perp D$*

Soit D une droite du plan et A un point non élément de D. Soit M un point variable sur D. Trouver l'enveloppe de la normale en M à (AM).

Exercice 15. *Concavité*

Soient u, v, w de classe $\mathcal{C}^2$, D_t la droite d'équation : $u(t)x + v(t)y + w(t) = 0$, et Γ l'enveloppe des droites D_t.

On note : $\delta = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{pmatrix}$, et on suppose pour tout t : $\delta\Delta w(t) \neq 0$.

Montrer que Γ tourne sa concavité vers O si et seulement si pour tout t : $\delta\Delta w(t) > 0$.

Exercice 16. *(Mines-Ponts '71)*

Soit la courbe définie dans le plan par

$$x = \frac{at}{1+t^4} \qquad y = \frac{at^3}{1+t^4}$$

1) Montrer qu'il s'agit bien d'une lemniscate de Bernoulli en trouvant son équation polaire.
2) D'un point M de la courbe, on peut mener quatre tangentes distinctes de celles de M et les points de contacts (réels ou imaginaires) sont alignés sur une droite $d(M)$. Déterminer l'enveloppe des droites $d(M)$.

Exercice 17. *(Mines-Ponts '71)*

Quel est le lieu du centre d'un cercle dont la développante roule sans glisser sur (Ox) ?

Exercice 18. *Sujet de géométrie du Baccalauréat d'Einstein 19/9/1896 (de 7h à 11h !)*

On donne un cercle de rayon r dont le centre se trouve à l'origine O d'un repère orthonormal. On considère les cordes de ce cercle perpendiculaires à l'axe des x. les cercles ayant ces cordes comme diamètres, sont tangents à l'ellipse de demi-axes $2\sqrt{r}$ et r aussi longtemps que la distance p de leur centre à O ne dépasse pas une certaine valeur maximale.

Démontrer cette proposition et déterminer la valeur maximale de p.

N.B. : Un second exercice consistait à trouver les angles et un côté d'un triangle dont on connaît les longueurs des côtés et le rayon du cercle inscrit.

Solutions des exercices

Exercice 1.
$x = \dfrac{3\cos\theta - \cos 3\theta}{4}$, $y = \dfrac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$.

Exercice 2.
$M = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, $S = (a, 0)$:

On obtient les équations paramétriques : $x = \dfrac{R(R\cos\theta - a)}{R - a\cos\theta}$, $y = \dfrac{(R^2 - a^2)\sin\theta}{R - a\cos\theta}$.

Pour $R \neq a$, il s'agit de la conique de centre O et d'équation cartésienne : $\dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{R^2 - a^2} = 1$.

Exercice 3.
$y_A = t \Rightarrow \begin{cases} 2px = t^2 + ht + h^2/2 \\ y = t + h/2 \end{cases} \Rightarrow$ parabole $y^2 + h^2/4 = 2px$.

Exercice 4.
$y_A = t, y_B = u \Rightarrow C : \left(\dfrac{ut}{2p}, \dfrac{t+u}{2}\right)$; aire $= \dfrac{|u-t|^3}{8p}$.
enveloppe : $M = \mathrm{mil}(A, B)$, parabole $y^2 + a^2/4 = 2px$.

Exercice 5.
1) F.

2) $M = (t^2/2p, t)$, $M' = (t'^2/2p, t') \Rightarrow tt' = -p^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{p}{4}\left(u^2 + \dfrac{1}{u^2}\right) \\ y = \dfrac{p}{2}\left(u - \dfrac{1}{u}\right) \end{cases}$ avec $u = \dfrac{t}{p}$. (Parabole passant par F)

3) $\begin{cases} x = \dfrac{3p}{4}\left(u^2 + \dfrac{1}{u^2}\right) \\ y = -\dfrac{p}{4}\left(u - \dfrac{1}{u}\right)^3 \end{cases}$.

Exercice 6.
1) Foyer.

2) Point d'impact : $\left(\dfrac{t^2}{2p}, t\right)$ Point caractéristique : $\left(\dfrac{3t^2}{2p}, \dfrac{t(3p^2 - t^2)}{2p^2}\right)$.

Exercice 7.
$M = (t^2/2p, t) \Rightarrow I = (3t^2/2p + p, -t^3/p^2)$. Soit $P = (u^2/2p, u)$:
$IP = IM \quad \Leftrightarrow \quad (u - t)^3(u + 3t) = 0 \Rightarrow u = -3t$.
Enveloppe : $\begin{cases} x = -3t^2/2p \\ y = 3t. \end{cases}$ (Parabole)

Exercice 8.
équation polaire : $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{p(\cos\theta - \sin\theta)}{2 + e(\cos\theta - \sin\theta)} \\ y = \dfrac{p(\cos\theta + \sin\theta)}{2 + e(\cos\theta - \sin\theta)} \end{cases}$ conique d'excentricité $\dfrac{e}{\sqrt{2}}$.

Exercice 9.
$3x = \cos 2\theta + 2\cos\theta$, $3y = \sin 2\theta + 2\sin\theta$: cardioïde à rebroussement en $(-1/3, 0)$.

Exercice 10.
$D = Ox$, rayon $= 1$: $x = \theta - \cos\theta\sin\theta$, $y = \sin^2\theta$. pt caractéristique = projeté de I.

Exercice 11.
$M = \begin{pmatrix} a(1+\cos t) \\ a\sin t \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2a\cos t(1+\cos t) \\ 2a\sin t(1-\cos t) \end{pmatrix}$. Hypocycloïde à trois rebroussements.

Exercice 12.
$x = a\cos 4\theta$, $y = a\sin 4\theta$.

Exercice 13.
1) $x = \dfrac{\cos t}{a}(a^2 + (a^2-b^2)\sin^2 t)$, $y = \dfrac{\sin t}{b}(b^2 - (a^2-b^2)\cos^2 t)$.
3) Point stationnaire ssi $a^2 > 2b^2$, obtenu pour $\sin^2 t = \dfrac{a^2-2b^2}{3(a^2-b^2)}$. Rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce.

Exercice 14.
$D = Ox$, $A = (0, a)$, $M = (t, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2/a. \end{cases}$ (Parabole)

Exercice 16.
1) $\dfrac{y}{x} = t^2 = \tan\theta$. Donc $x = at\cos^2\theta$ et $y = at^3\cos^2\theta$. Donc $x^2+y^2 = a^2t^2(1+t^4)\cos^4\theta$ soit $\rho^2 = a^2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{a^2}{2}\sin 2\theta$ qui est bien une équation polaire d'une lemniscate de Bernoulli.
2) Une équation générale d'une droite passant par $M(t)$ est $ux+vy+wa = 0$ avec $uat+vat^3+aw(1+t^4) = 0$ (1), soit encore $t^4 + \frac{v}{w}t^3 + \frac{v}{w}t + 1 = 0$; Soient t_1, t_2, t_3 et t_4 les racines de cette équation. On vient donc d'établir qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M(t_1)$, $M(t_2)$, $M(t_3)$ et $M(t_4)$ soient alignés est que $\prod\limits_{i=1}^{4} t_i = 1$ et $\sum\limits_{i=1,j=1}^{4} t_it_j = 0$.

On considère le point $M(t_1)$ et de ce point, on mène la tangente à la courbe. Soit t le paramètre du point de contact et t_2 le paramètre de l'autre point d'intersection. On a $t^2t_1t_2 = 1$ et $t_1t_2+2t(t_1+t_2)+t^2 = 0$ (2). On élimine t_2 et il vient $t_1t^4 + 2t^3t_1^2 + 2t + t_1 = 0$. Les quatre racines sont les paramètres des quatre points de contact des tangentes que l'on peut mener de $M(t_1)$. Or $\sum t_it_j = 0$ et $\prod t_i = 1$. Donc les quatre points de tengences sont alignés sur une droite $d(M(t_1))$.

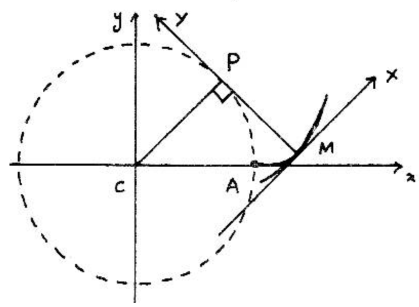
Pour l'enveloppe, les coefficients des équations (1) et (2) sont proportionnels, soit $\frac{w}{t_1} = \frac{v}{2t_1^2} = \frac{u}{2}$. Donc $d(M)$: $2x + 2t_1^2y + at_1 = 0$. On trouve $\Delta = a^2 - 16xy$ et l'enveloppe des droites $d(M)$ est donc l'hyperbole équilatère d'équation : $boxedzy = \left(\dfrac{a}{4}\right)^2$.

Exercice 17.
Sans perte de généralité, on prend un cercle de rayon 1 centré en O. Soit P le point du cercle d'abscisse curviligne s, $\overrightarrow{OP}(\cos s, \sin s)$.

Le point M de la développante associée a pour coordonnées $x = \cos s + s\sin s$ et $y = \sin s - s\cos s$.

Si s_1 est l'abscisse curviligne sur la développante, on a $\mathrm{d}s_1 = s\mathrm{d}s$ car $\mathrm{d}x = (-\sin s + \sin s + s\cos s)\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}y = (\cos s - \cos s + s\sin s)\mathrm{d}s$.

Par conséquent, $s_1 = \dfrac{s^2}{2} + c$ (1). On peut prendre $c = 0$.



La droite (PM) est normale à la développante et $y_C = -\overline{PM} = -\overline{PA} = s$, $x_C = \overline{OM} - 1 = s_1 - 1$ (dans le repère $(M; X, Y)$) d'après (1), il vient $y_C^2 = 2(x_C + 1)$.

Le lieu cherché est donc une parabole.