#217

Torseurs

Formulaire

déf : $f(M) = f(O) + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{S}$, $\overrightarrow{S}$ = somme, $f(O)$ = moment en O.

ppté : $\Big(f(B) - f(A)\Big) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. (champ équiprojectif)

invariant scalaire : $i = f(O) \cdot \overrightarrow{S}$.

comoment de deux torseurs : $c = \frac{1}{2}\big(f(O) \cdot \overrightarrow{S}\,' + f'(O) \cdot \overrightarrow{S}\big)$.

couple = torseur constant.

glisseur = torseur s'annulant en un point avec $\overrightarrow{S} \neq \overrightarrow{0}$. CNS : $\overrightarrow{S} \neq \overrightarrow{0}$, $i = 0$.

axe central : $D = \{M \text{ tq } f(M) \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{S}\} = H + \mathbb{R}\overrightarrow{S}$ avec $\overrightarrow{HO} = \dfrac{f(O) \wedge \overrightarrow{S}}{\|\overrightarrow{S}\|^2}$.

module : $\|f(M)\|^2 = \|f(H)\|^2 + \|\overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{S}\|^2$.

lignes de champ d'un torseur = hélices d'axe D.

glisseur associé à A, B : $f(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$.

couple = somme de deux glisseurs de vecteurs opposés.

Somme de glisseurs : concourants > 0 ou un glisseur,
coplanaires > 0 ou un couple ou un glisseur,
parallèles $>$ idem.

Exercice 1. *Moment parallèle à un plan*

Soient $\mathcal{T}$ un torseur et $\mathcal{P}$ un plan. Déterminer le lieu des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\mathcal{T}(M) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Exercice 2. *Torseurs de sommes orthogonales*

Soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ deux torseurs de sommes non nulles, orthogonales. Montrer que le comoment de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ est nul si et seulement si les axes centraux sont concourants.

Exercice 3. *Somme de glisseurs*

Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. On considère les glisseurs :

$\mathcal{G}_1$ d'axe $\begin{cases} y = mx \\ z = 1 \end{cases}$ et de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$.

$\mathcal{G}_2$ d'axe $\begin{cases} y = -mx \\ z = -1 \end{cases}$ et de vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - m\overrightarrow{j}$.

Déterminer l'axe central de $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$.

Exercice 4. *Glisseurs associés à un tétraèdre*

Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati de l'espace. Pour $X, Y \in \{A, B, C, D\}$ distincts, on note $\mathcal{G}_{XY}$ le glisseur d'axe la droite (XY) et de vecteur $\overrightarrow{XY}$.

Montrer que $(\mathcal{G}_{AB}, \mathcal{G}_{AC}, \mathcal{G}_{AD}, \mathcal{G}_{BC}, \mathcal{G}_{BD}, \mathcal{G}_{CD})$ est une base de l'espace des torseurs.

Exercice 5. *Produit vectoriel de torseurs*

Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux torseurs de sommes $\overrightarrow{R}_1$, $\overrightarrow{R}_2$. On définit le champ $\mathcal{T}$ par :

$$\mathcal{T}(M) = \overrightarrow{R}_1 \wedge \mathcal{T}_2(M) + \mathcal{T}_1(M) \wedge \overrightarrow{R}_2.$$

1) Montrer que $\mathcal{T}$ est un torseur de somme $\overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_2$ (produit vectoriel de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$).

2) Si $\overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_2 \neq \overrightarrow{0}$, montrer que l'axe central de $\mathcal{T}$ est la perpendiculaire commune des axes centraux de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

Exercice 6. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Soit $\mathscr{T}$ un torseur, A un point fixe, $\mathscr{P}$ un plan fixe. Trouver le lieu des points M où le moment du torseur est porté par la droite (AM).

Trouver le lieu des points M où le moment du torseur est dans le plan $\mathscr{P}$. Déterminer l'enveloppe du support de ces moments.

Exercice 7. ♩ *(Mines-Ponts '71)*

Soit le système de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$:

$$\overrightarrow{V_1} \in \mathbb{D}_1 \begin{cases} z = h \\ x\cos\theta + y\sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{V_2} \in \mathbb{D}_2 \begin{cases} z = -h \\ x\cos\theta - y\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Quel est le lieu de l'axe central du torseur représenté par $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ lorsque les modules de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ varient ?

Solutions des exercices

Exercice 1.
Droite orthogonale à $\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\mathcal{P}}$, ou $\emptyset$ ou $\mathcal{P}$.

Exercice 3.
Ox : $f(M) = 2\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{i} - 2m\overrightarrow{i}$.

Exercice 4.
Soit $\mathcal{T}$ un torseur : on décompose $\mathcal{T}(A)$ en $\alpha\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD} + \gamma\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CD}$, et $\overrightarrow{R}$ en $\alpha'\overrightarrow{AB} + \beta'\overrightarrow{AC} + \gamma'\overrightarrow{AD}$.
$\Rightarrow$ famille génératrice.

Exercice 6.
On prend le point A comme origine du repère. Soient $\overrightarrow{V}$ et $\mathcal{M}_A$ les composantes de $\mathscr{T}$ en A. On prend l'axe (Ax) parallèle à $\overrightarrow{V}$: $\mathcal{M}_M = \mathcal{M}_A + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{AM}$ (1).

On cherche les points M tels que $\mathcal{M}_M = \lambda\overrightarrow{MA}$. Si on écrit $\mathcal{M}_A \begin{cases} L \\ M \\ N \end{cases}$ et $\overrightarrow{V} \begin{cases} u \\ 0 \\ 0 \end{cases}$, l'égalité (1) devient

$$\begin{cases} L = -\lambda x \\ M - uz = -\lambda y \\ M + uy = -\lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-L}{\lambda} \\ y = -\dfrac{\lambda M + uN}{\lambda^2 + u^2} \\ z = \dfrac{Mu - \lambda N}{\lambda^2 + u^2} \end{cases}$$

comme représentation paramétrique de la courbe lieu de M.

On prend comme origine l'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec l'axe central du torseur $\mathscr{T}$ et le plan (xOy). On a donc $\mathscr{T}_0 = (\overrightarrow{V}, \mathcal{M}_0 = \alpha\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_M} = \overrightarrow{\mathcal{M}_0} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Si $\overrightarrow{V}(X, Y, Z)$, le point M appartenant au plan $\mathscr{P}$ la composante suivant (Oz) de $\overrightarrow{\mathcal{M}_M}$ est nulle donc $\alpha Z + Xy - xY = 0$.

Le lieu cherché est la droite du plan $\mathscr{P}$ d'équation $Xy - xY + \alpha Z = 0 = f(x, y)$ (2).

Enveloppe des supports : Un vecteur directeur du moment est

$$\begin{pmatrix} \alpha X + zY - yZ \\ \alpha Y + Zx - zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X - yZ \\ \alpha Y + xZ \end{pmatrix} \text{ avec } M \in \mathscr{P}.$$

donc une équation du support (point courant (ξ, η)

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\alpha Y + xZ}{\alpha X - yZ} \quad (3) \quad \Leftrightarrow \quad g(x, y, \eta, \xi) = 0$$

et ceci avec la relation (2).

Il faut éliminer x et y entre (2) et (3) : $\dfrac{Y}{X} = \dfrac{\alpha Y + Zx - Z(\xi - x)}{\alpha X + Zy + Z(\eta - y)} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{f'_x}{f'_y} = \dfrac{g'_x}{g'_y}$.

En faisant les calculs, on trouve une parabole.

Exercice 7.
On pose $||\overrightarrow{V_1}|| = \lambda$ et $||\overrightarrow{V_2}|| = \mu$. on a alors $\overrightarrow{V_1} = (-\lambda \sin\theta, -\lambda\cos\theta, 0)$ et $\overrightarrow{V_2}(\mu \sin\theta, \mu\cos\theta, 0)$.

Le support de $\overrightarrow{V_1}$ (resp. $\overrightarrow{V_2}$) passe par le point $A_1(0, 0, h)$ (resp. $A_2(0, 0, -h)$).

Si Δ désigne l'axe central du torseur représenté par $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$, alors Δ est entièrement déterminé par un de ses points et un vecteur directeur $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ de coordonnées $((\lambda + \mu)\sin\theta, (\mu - \lambda)\cos\theta, 0)$.

Donc $\Delta // (xOy)$. On peut donc chercher un de ses points sur les plans (xOz) ou (yOz).

On cherche par exemple un point $M(0, y, z)$ sur (yOz). Comme $M \in \Delta$, alors $\overrightarrow{M}^t_M(R) = k\overrightarrow{R}$, i.e. $\overrightarrow{MA_1} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{MA_2} \wedge \overrightarrow{V_2} = k\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ (d'après le théorème de Varignon : $\overrightarrow{M}^t_M(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) = \overrightarrow{M}^t_M\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{M}^t_M\overrightarrow{V_2}$).

$$\overrightarrow{MA_1}\begin{cases}0\\-y\\h-z\end{cases}\quad\overrightarrow{V_1}\begin{cases}\lambda\sin\theta\\-\lambda\cos\theta\\0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{MA_1}\wedge\overrightarrow{V_1}\begin{cases}\lambda\cos\theta(h-z)\\\lambda\sin\theta(h-z)\\\lambda y\sin\theta\end{cases}$$
$$\overrightarrow{MA_2}\begin{cases}0\\-y\\-(h+z)\end{cases}\quad\overrightarrow{V_2}\begin{cases}\mu\sin\theta\\\mu\cos\theta\\0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{MA_2}\wedge\overrightarrow{V_2}\begin{cases}\mu\cos\theta(h+z)\\-\mu\sin\theta(h+z)\\\mu y\sin\theta\end{cases}$$

On écrit maintenant que $\overrightarrow{MA_1}\wedge\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{MA_2}\wedge\overrightarrow{V_2}k(\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2})$.

$$\frac{\cos\theta[\mu(h+z)+\lambda(h-z)]}{(\lambda+\mu)\sin\theta}=\frac{\sin\theta[\lambda(h-z)-mu(h+z)]}{(\lambda-\mu)\cos\theta}\quad(1).$$

$(\lambda+\mu)y\sin\theta=0\quad\Rightarrow\quad y=0$ avec $\lambda\neq\mu\neq0$, $\sin\theta\neq0$ dont l'axe central coupe l'axe (Oz).

Par conséquent, si $M(x,y,z)$ appartient la surface décrite par l'axe central lorsque λ et μ varient ses composantes vérifient : z vérifie (1), $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\lambda+\mu}{\mu-\lambda}\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2) ($\overrightarrow{R}$ vecteur directeur de Δ).

Or d'après (1) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}[h+\frac{\mu-\lambda}{lambda+\mu}z]=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}[-h-z\frac{\lambda+\mu}{\mu-\lambda}]$ et en reportant dans (2), on trouve

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}[h+\frac{y}{x}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}z]=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}[-h-z\frac{x}{y}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}]$$

Donc $z\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{h}{\sin\theta\cos\theta}=0\quad\Leftrightarrow\quad z=\dfrac{-2hxy}{\sin2\theta(x^2+y^2}$. Il s'agit d'une conoïde de Plücker.