

Exercice 1. ♪

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé. Montrer que, pour tous les éléments A et B de $\mathcal{A}$:

$$p(A \cap B) - p(A)p(B) \leq \frac{1}{4}$$

(on pourra commencer en supposant que $p(A) \leq p(B)$).

Peut-on avoir l'égalité ?

Exercice 2. ♪

On remplace le valet de trèfle par un second as de pique dans un jeu de 32 cartes. On distribue n cartes.

- 1) Quelle est la probabilité que l'on se rende compte de la supercherie ?
- 2) Si on suppose que $n = 4$ et que l'on fasse plusieurs tirages en remettant les cartes dans le paquet à chaque fois, quel est le nombre minimal de tirage qu'il faut faire avant que la probabilité de découvrir la supercherie n'atteigne 95% ?

Exercice 3. ♪

Je dois affronter Goliath dans un duel constitué de trois parties sur deux jeux : la bataille de pouces (où il est plus fort que moi) et les échecs (où je suis plus fort que lui). On doit alterner les jeux et si l'un d'entre nous gagne deux parties de suite, il a gagné. Que dois-je préférer ? Pouces/Echecs/Pouces ou Echecs/Pouces/Echecs ?

Exercice 4. ♪ *Le jeu du CDXXI*

Avec trois dés, on veut obtenir 421. On les jette tous ensemble et on peut relancer certains d'entre eux afin d'obtenir le 421. Quelle est la probabilité de réussir ?

Exercice 5. *Belote en famille*

Lors d'une partie de belote, Claire est la première personne à jouer et possède un as qui n'est pas à l'atout (mettons l'as de cœur en supposant que l'atout est à pique). Elle hésite à le poser de peur de se le faire couper car elle possède au total $n = 5$ des huit cœurs du jeu.

- 1) Quelle est la probabilité qu'un des trois autres joueurs n'ait pas de cœur ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'elle se fasse couper son As ?
- 3) Déterminer la probabilité qu'elle a de se faire couper dans les autres cas de figures $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Exercice 6. *Koh Lanta*

Lors du jury final, Denis Brogniart sort les 10 bulletins et les lit au fur et à mesure :

Donald, Vladimir, Donald, Vladimir, Donald, Vladimir,
-"Egalité parfaite entre vous Donald et vous Vladimir."

Donald, Donald,

-"Cinq votes pour vous Donald et trois pour vous Vladimir. Ce neuvième bulletin peut être définitif."

Donald,

- Voila, Donald, vous êtes éliminé. Je lis ce dernier bulletin qui ne changera rien :

Donald.

- 1) Si l'on imagine que l'urne a cette répartition, quelle est la probabilité que les six premiers votes aient été ceux du dépouillement ?
- 2) Pensez-vous réellement que Denis Brogniart procède au tirage aléatoire des bulletins ?

Exercice 7. 🎵



Dans un bandit manchot (slot machine), on ne gagne que si on réussit à aligner trois symboles identiques. Les trois rouleaux sont identiques et composés de sept figures distinctes. Quelle est la probabilité de gagner ?

Exercice 8.

Une urne contient deux boules marquées 1, deux marquées 2 et une marquée 3. On prélève simultanément deux boules au hasard et on appelle X la somme des numéros marqués sur les deux boules. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

Exercice 9. 🎵

n personnes entrent dans un avion. On les numérote de 1 à n en commençant par le premier qui entre. Ils s'installent de la façon suivante : Le premier prend une place au hasard et tous les suivants prennent la place correspondant à leur numéro, sauf si elle est déjà prise, auquel cas ils prennent une place au hasard.

On cherche quelle est la probabilité p_n que le $n^{\text{ième}}$ s'assoit à sa place ?

- 1) Si $n = 2$, $n = 3$, ou $n = 4$?
- 2) Cas général.

Exercice 10.

Un ascenseur dessert six étages. Quatre personnes le prennent au rez-de-chaussée. Quelle est la probabilité pour que deux personnes au moins descendent au même étage ?

Exercice 11. 🎵 (Animath 2018)

Une urne contient quatre boules vertes et six boules bleues. Une seconde urne contient seize boules vertes et N boules bleues. On tire aléatoirement une boule dans chaque urne. La probabilité que les deux boules soient de la même couleur vaut 0,58. Déterminer N .

Exercice 12. 🎵

Dans un certain établissement (appelons-le F.L.), les professeurs de mathématiques ont décidé de corriger le bac blanc exercice par exercice. Il y a 10 classes (et donc 10 correcteurs) et quatre exercices par copie. On ne tient pas compte de l'effectif des classes. Ainsi,

- le correcteur A corrigera l'exercice 1 des classes 1, 2, 3 et 4,
- le correcteur B , l'exercice 1 des classes 5, 6, 7 et 8,
- le correcteur C l'exercice 2 des classes 1, 2, 3 et 4,
- le correcteur D , l'exercice 2 des classes 5, 6, 7 et 8,
- et ainsi de suite jusqu'au
- correcteur I , l'exercice 1 des classes 9 et 10 et l'exercice 2 des classes 9 et 10
- correcteur J , l'exercice 3 des classes 9 et 10 et l'exercice 4 des classes 9 et 10

On considère qu'il y a quatre correcteurs *Hannibal* et six correcteurs *Agneau*.

- 1) Quelle est la probabilité que les quatre Hannibal corrigent tous quatre fois le même exercice (i.e. ne soient ni I , ni J) ?
- 2) Quelle est la loi du nombre H d'Hannibal corrigeant un seul exercice ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'une classe soit corrigée intégralement par des Hannibal ?
- 4) Si les professeurs décident plutôt de s'échanger les paquets par classes, quelle est la probabilité qu'une classe soit corrigée par un Hannibal ?
- 5) Quel système est favorable aux élèves ?

Exercice 13.

Soit n un entier supérieur à 2. On dispose de n urnes contenant chacune x boules blanches et y boules noires. On tire une boule de la première urne et on la met dans la deuxième ; puis on tire une boule de la deuxième urne et on la met dans la troisième ; et ainsi de suite... Enfin, on tire une boule de la dernière urne. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note B_i l'évènement : "on tire une boule blanche de la $i^{\text{ième}}$ urne".

- 1) Déterminer $p(B_1)$.
- 2) Montrer que $p(B_2) = \frac{x}{x+y}$.
- 3) Déterminer $p(B_n)$.

Exercice 14. ♣ ($\frac{1}{2}$ -finale FFJM, 2018)

On lance simultanément sept dés classiques à six faces numérotées de 1 à 6.

Quelle est la probabilité pour que les six valeurs possibles apparaissent sur les faces supérieures de ce sept dés ? (l'une des valeurs est évidemment répétée)

Exercice 15.

Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p fixé, $p \in]0; 1[$, et la probabilité d'obtenir face est $q = 1 - p$.

Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.

Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus par le joueur B.

- 1) rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.
- 2) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

- 3) Montrer que $p(Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$.

- 4) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $p(Y = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$. Puis, que $p(Y = n) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$.

Exercice 16.

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et un joueur B dispose d'une pièce dont la probabilité de faire pile est $p \in]0, 1[$. Les lancers des pièces sont supposés indépendants.

Les deux joueurs lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'au moins une des deux pièces donne pile. S'ils font pile simultanément, le jeu s'arrête sans que personne n'ait gagné d'argent. Sinon, le premier à obtenir pile s'arrête et l'autre continue ses lancers jusqu'à obtenir pile également et paye un euro à son adversaire à chacun des lancers de cette série en solitaire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A et Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur B et $Z = Y - X$.

1) Justifier que les variables X et Y suivent des lois géométriques dont on donnera le paramètre. Préciser $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et les valeurs de $p(X = k)$, $p(Y = k)$, $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.

2) a) Montrer que $E(Z) = \frac{1-3p}{p}$ et $V(Z) = \frac{6p^2-p+1}{p^2}$.

b) Montrer que $\sum_{k \geq 1} p(X = k) \times p(Y = k) = \frac{p}{1+2p}$ et en déduire $p(Z = 0) =$.

c) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que $p(Z < 0)$ puis interpréter les événements $(Z = 0)$, $(Z > 0)$ et $(Z < 0)$.

Exercice 17.

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients C_1 , C_2 et C_3 arrivent en même temps. Mes clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1 , X_2 et x_3 les variables égales à la durée de l'opération des clients C_1 , C_2 et C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement : " C_3 termine en dernier son opération".

1) Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2))$.

2) Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance. On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

3) Calculer la probabilité $p(\Delta = 0)$.

4) Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier que $p(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(X_2 = k)p(X_1 = n + k)$.

b) En déduire $p(\Delta = n) = \frac{2pq^n}{1+q}$.

5) a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.

b) Montrer que $E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.

6) Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.

7) a) En déduire $p(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(\Delta = k)p(X_3 > k)$.

b) Exprimer $p(A)$ à l'aide de p et q .

Exercice 18. (ENS Cachan D2 - 2000)

Un candidat au concours d'entrée à une grande école vient de répondre à toutes les questions posées dans l'épreuve de mathématiques. Ses réponses contiennent quatre erreurs. A chaque relecture par le candidat, une faute non corrigée est corrigée avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. On suppose que les relectures sont indépendantes les unes aux autres.

1) Déterminer le nombre minimal de relectures pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune erreur soit supérieure à 0,8.

2) Même question qu'en 1, avec le nombre X d'erreurs qui est réparti uniformément sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

3) Supposons maintenant qu'après avoir terminé de répondre aux questions posées dans l'épreuve de mathématique en question, le candidat pense que la probabilité que ses réponses soient entièrement correctes est égale à 0,6. Il procède à une relecture de ses réponses en sachant que son expérience

passée montre qu'il est capable de déceler des erreurs, lorsqu'elles existent, dans 85 cas sur 100 (en une seule lecture).

- a) Déterminer la probabilité qu'après une relecture, le candidat ne trouve aucune erreur.
- b) Déterminer la probabilité que ses réponses soient entièrement correctes sachant qu'il n'a trouvé aucune erreur après une relecture.

Exercice 19.

Les vacanciers ont trois poubelles B_1 , B_2 et B_3 à leur disposition sur la plage.

Ils se comportent de la façon suivante :

- Un sur deux laisse ses détritiques sur la plage,
- Parmi les autres, la moitié met son sac de détritiques dans la poubelle B_1 , et les autres mettent à part égale dans B_2 et B_3 .

On étudie le comportement de n vacanciers. On appelle X_1 , X_2 et X_3 les variables égales au nombre de sacs jetés dans les poubelles B_1 , B_2 et B_3 .

- 1) Donner la loi de $X = X_1 + X_2 + X_3$.
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'un vacancier jette son sac dans la poubelle B_1 ? Même question pour les autres poubelles.
- 3) Trouver la loi de chacune des variables X_1 , X_2 et X_3 . Donner leur espérance et leur variance.
- 4) Les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont-elles indépendantes ?

Exercice 20.

On considère une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher : 1 blanche et 3 rouges.

- 1) On tire simultanément deux boules dans cette urne puis on les remet dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
- 2) On effectue maintenant une succession de tirages simultanés de deux boules dans cette urne (en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage) jusqu'à obtenir un tirage constitué de deux boules rouges. Soit N la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.
 - a) Quelles sont les valeurs prises par N ?
 - b) Reconnaître la loi de N . On précisera $p(N = k)$ pour tout entier $k \geq 1$.
 - c) En déduire son espérance et sa variance.
 - d) Calculer la probabilité que l'expérience s'arrête au plus tard au quatrième tirage.

Exercice 21.

On considère une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher : 1 blanche et 3 rouges.

On effectue des tirages d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. Soit Y la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
- 2) Décrire l'événement $(Y = 2)$ et calculer $p(Y = 2)$.
- 3) Déterminer la loi de Y , son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.
- 4) Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête. Exprimer Z en fonction de Y .
En déduire la loi de Z , son espérance et sa variance.

Exercice 22.

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est 0,1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est 0,2.

- 1) On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement : "l'objet provient de la chaîne A ".

2) On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

- Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y .
- Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $p_{(Y=n)}(X = k)$. (on distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
- En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Exercice 23.

Mille personnes gagnent la possibilité de jouer à un jeu de pile ou face équilibré pour gagner 10 000e. Un petit malin à l'esprit d'entreprise propose à chaque joueur la somme de 4 500e pour jouer à sa place : évidemment, s'il gagne, c'est lui qui empoche le gain.

- Calculer l'espérance mathématique et l'écart type du gain de cet entrepreneur en fonction du nombre n de personnes qui acceptent son offre.
- Calculer, en fonction de n , la probabilité que l'entrepreneur perde de l'argent.

Exercice 24.

Guy est très distrait : quand il s'arrête pour prendre de l'essence ; il y a une chance sur dix pour qu'il reparte sans sa passagère, descendue pour visiter les services de la station...

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes que Guy a parcouru en compagnie de sa passagère, avant de repartir sans elle.

- Etablir la loi de probabilité de X . Calculer $E(X)$.
- Quel est le nombre maximum d'étapes que peut comporter le voyage pour que la passagère arrive à destination dans la voiture de Guy avec une probabilité supérieure à 0,5 ?

Exercice 25.

On lance indéfiniment une pièce équilibrée et l'on désigne par T la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, la pièce donne face.

- Déterminer pour tout entier $k \geq 1$ la probabilité des événements $T = k$ et $T \leq k$.
- En déduire l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire.
- On lance maintenant deux pièces simultanément. On appelle N la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, chacune des deux pièces a amené au moins une fois face.

On note T_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, la première pièce a amené face et T_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, la seconde pièce a amené face.

- Déterminer $p(N = 1)$.
- Comparer les événements $(N \leq k)$ et $[(T_1 \leq k) \cap (T_2 \leq k)]$ pour $k \geq 1$.
En déduire les probabilités $p(N \leq 2)$, puis, plus généralement $p(N \leq 1)$ pour $k \geq 1$.
- Déduire de ce résultat que $p(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$.
- On s'intéresse enfin à l'espérance et à la médiane de la variable aléatoire N . Exprimer, sous forme de fraction irréductible, l'espérance $E(N)$ de N .

Exercice 26.

On admettra que pour tout entier naturel k non nul et que pour tout réel x strictement compris entre

$$-1 \text{ et } 1, \text{ on a : } \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique. La probabilité d'obtenir pile est un nombre $p \in]0, 1[$.

Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile. On note N le nombre aléatoire de lancers nécessaires. Dans un second temps, si le premier pile était apparu au $n^{\text{ième}}$

lancer, il lance cette même pièce n fois et l'on note X le nombre aléatoire de piles obtenus au cours de cette deuxième série de lancers.

- 1) Déterminer la loi du couple $(N; X)$.
- 2) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p(X = k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} \quad \text{et} \quad p(X = 0) = \frac{q}{1+q}.$$

- 3) Si la pièce est équilibrée, calculer la probabilité d'obtenir trois piles en tout.

Exercice 27.

Etant donné un entier n non nul, on considère n personnes qui se répartissent au hasard dans trois hôtels H_1 , H_2 et H_3 . Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i .

- 1) Déterminer les lois des trois variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 .
- 2) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

Exercice 28. Concours général 2009

On joue avec quatre dés de forme icosaédrique. Les faces sont numérotées de 1 à 20. Chaque face apparaît avec la même probabilité de $\frac{1}{20}$.

Lorsque, parmi les quatre dés, une face apparaît au moins deux fois, on marque le nombre de points correspondant à cette face.

Par exemple, 3 – 4 – 12 – 16 ne marque rien, 2 – 8 – 11 – 11 marque 11, 4 – 9 – 9 – 9 marque 9, 7 – 7 – 14 – 14 marque 21 et 2 – 2 – 2 – 2 marque 2.

- 1) Quelle est la probabilité de ne rien marquer ?
- 2) Si $a \in \llbracket 1, 20 \rrbracket$, quelle est la probabilité d'avoir k nombres a dans la liste des quatre résultats.
- 3) Pour tout a , on note X_a la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a au moins deux dés égaux à a parmi les quatre lancers et à 0 sinon.

Préciser la loi de X_a et exprimer le gain G à l'aide de ces variables. Combien de points puis-je espérer en moyenne ?

- 4) Quelle est la probabilité que l'on marque exactement 8 points ?
- 5) Si l'on suppose qu'après un lancer des quatre dés, on est autorisé à lancer de 0 à 4 dés.

Exercice 29.

Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et X une variable uniforme sur $\llbracket 0, a \rrbracket$. On suppose que $E(X) = 6$. Trouver a .

Exercice 30.

On lance simultanément deux dés équilibrés à six faces ; on note Y le maximum des chiffres et Z le minimum. Donner les lois de Y et de Z . Calculer leur espérance et leur variance.

Exercice 31.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel non nul n , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

Déterminer la loi de X_1 , puis X_2 , puis X_n .

Exercice 32.

On considère n urnes numérotées de 1 à n . La première contient des boules blanches et noires, avec une proportion p de boules blanches. Les urnes suivantes contiennent chacune a boules blanches et a boules noires.

On effectue n tirages de la manière suivante : on tire une boule de la première urne que l'on place dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne que l'on place dans la troisième urne, et ainsi de suite jusqu'au tirage dans la dernière urne.

Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par X_k la variable aléatoire égale à 1 si le k^e tirage est une boule blanche et 0 sinon.

- 1) Déterminer les lois de probabilité de X_1 et X_2 , puis leur espérance et leur variance en fonction de p et a .
- 2) Démontrer qu'il existe une valeur de p pour laquelle X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité.

Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $p_k = p(X_k = 1)$ et $q_k = p(X_k = 0)$.

- 3) Démontrer qu'il existe une matrice M dépendant de a , telle que pour tout k de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on ait :

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}.$$

- 4) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de probabilité de X_n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$.

Exercice 33.

On considère une urne de taille $N > 1$, contenant r boules blanches et $N-r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à obtenir toutes les boules blanches. On note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir toutes les boules blanches.

- 1) a) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 1$.
b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$.
- 2) Dans le cas $r = 1$, et N quelconque, reconnaître la loi de X , donner son espérance et sa variance. Même question dans le cas $r = N$.
- 3) On traite maintenant le cas général $1 < r < N$. a) Déterminez l'ensemble des valeurs prises par X .
b) Soit k l'une de ces valeurs, déterminer la probabilité pour qu'au cours des $k-1$ premiers tirages, soient apparues $r-1$ boules blanches. Vérifier que $p(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$.
c) En déduire les valeurs des sommes : $\sum_{k=r}^N \binom{k-1}{r-1}$, puis $\sum_{k=r}^N \binom{k}{r}$, et $\sum_{k=r}^N \binom{k+1}{r+1}$.
d) Après avoir vérifié que $n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p}$, montrer que $E(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}$.
e) Calculer $E(X(X+1))$ et en déduire $V(X)$.

Exercice 34.

Un cavalier a $n \in \mathbb{N}^*$ haies à sauter numérotées de 1 à n , il s'arrête au premier saut non réussi. On suppose que s'il se présente devant la k^e haie, la probabilité pour qu'il réussisse son saut est $q_k \in]0, 1[$. On note X le nombre de sauts réussis, ainsi X prend la valeur 0 s'il échoue à la première haie.

- 1) Déterminer la loi de X .
- 2) On suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $q_k = q$ constant. Déterminer la loi de X en fonction de q et $p = 1 - q$.
- 3) Pour $t \in]0, 1[$, on pose $G_X(t) = \sum_{k=0}^n t^k p(X = k)$.

Justifier que $E(X) = G'_X(1)$. En déduire l'espérance de X ainsi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$.

Exercice 35.

Montrer qu'il n'est pas possible de truquer deux dés de la même manière de sorte que la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus en lançant ces deux dés soit une variable uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$.

Exercice 36. Les allumettes de Banach

Un joueur dispose de deux boîtes d'allumettes, qui contiennent initialement $n \in \mathbb{N}^*$ allumettes. L'une des boîtes est notée P l'autre F . Il dispose aussi d'une pièce de monnaie équilibrée. Il répète l'expérience :

- Lancer la pièce.
- S'il obtient pile il enlève une allumette de la boîte P , sinon de la boîte F .
- Il s'arrête lorsqu'il prend la dernière allumette de l'une des boîtes. On note alors X le nombre d'allumettes qui restent dans l'autre boîte.

1) Déterminer l'univers image de X ?

2) Déterminer la loi de X .

3) On change l'expérience et on suppose qu'il s'arrête non plus lorsqu'il prend la dernière allumette d'une boîte, mais au moment où il doit retirer une allumette d'une boîte, mais au moment où il doit retirer une allumette d'une boîte vide. Déterminer la loi de X dans ce cas.

Exercice 37.

On dispose d'un dé et de 6 pièces. On lance le dé, on note D le nombre obtenu. On lance ensuite D pièces et on note X le nombre de faces obtenues. Donner la loi et l'espérance de X .

Exercice 38.

Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10h et 11h, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n + 1$ est $p = 0,1$. On veut calculer la probabilité pour que 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1) Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.

2) Quelle est la probabilité pour qu'au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

Exercice 39.

Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

Exercice 40.

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1) Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?

2) Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?

3) Soit X la variable aléatoire "nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard". Quelle est la loi de probabilité de X , son espérance, sa variance et son écart type ?

4) Calculer $p(X = 5)$.

Exercice 41.

Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90. (utiliser une loi de Poisson). Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90.

Exercice 42.

Une urne contient six boules blanches et quatre noires. On tire successivement et au hasard des boules avec remise.

1) Quelle est la probabilité de n'obtenir qu'une seule boule blanche en trois tirages ?

- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux boules blanches en cinq tirages ?
- 3) Quelle est la probabilité que la première boule blanche apparaisse au n^{e} tirage ?
- 4) Quelle est la probabilité que la k^{e} boule blanche apparaisse au n^{e} tirage ?

Exercice 43.

Dans un laboratoire se trouve une cage avec vingt souris présentant deux caractères : sexe (mâle ou femelle) et couleur (blanche ou noire).

Il y a douze mâles, dont sept blancs et onze souris blanches en tout. On décide de prélever trois souris au hasard.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir trois souris blanches si le prélèvement est effectué avec remise.
- 2) Calculer la probabilité d'obtenir trois souris blanches si le prélèvement est effectué sans remise.
- 3) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une souris blanche si le prélèvement est effectué avec remise.
- 4) Calculer la probabilité d'obtenir trois souris blanches ou mâles si le prélèvement est effectué sans remise.

Exercice 44.

Pour organiser une coupe, on organise un tirage au sort qui réunit six équipes de basket-ball de 1^{ère} division et six équipes de 2^{ème} division, de sorte que, au premier tour, chaque équipe joue un match et un seul.

- 1) Combien peut-on obtenir de matchs différents ?
- 2) Combien peut-on obtenir de tirages au sort différents sachant que les matchs se joueront simultanément ?
- 3) Calculer la probabilité que tous les matchs opposent une équipe de 1^{ère} division à une équipe de 2^{ème} division.
- 4) Calculer la probabilité que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.

Exercice 45.

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10.

- 1) On tire au hasard, sans remise, trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 10 ?
- 2) Même question s'il y a remise.
- 3) On tire au hasard, sans remise, trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
- 4) On tire au hasard avec remise trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre strictement croissants ?
- 5) On tire au hasard avec remise trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissants ?

Exercice 46.

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1 , U_2 et U_3 , chacune contenant k boules, où $k \geq 3$.

Il y a trois boules noires dans l'urne U_1 , deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3 , et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante :

Le joueur lance le dé :
 • S'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule de l'urne U_1 , note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 .
 • S'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2 , note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 .
 • Si le numéro amené par le dé n'est ni le 1, ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule de l'urne U_3 , note sa couleur et la remet dans l'urne U_3 .

On désigne par A , B , C et N les événements suivants :

A : le dé amène le numéro 1.

B : le dé amène un multiple de 3.

C : le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3.

N : la boule tirée est noire.

Le joueur joue une partie :

- 1) Quelle est la probabilité qu'il amène une boule noire ?
- 2) Quelle est la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire ?
- 3) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à 0,5 ?
- 4) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{30}$?

Exercice 47.

Trois coffres notés C_1 , C_2 et C_3 ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce.

Le coffre C_1 contient deux pièces d'or, C_2 deux pièces d'argent et C_3 une pièce d'or et une d'argent.

1) On ouvre au hasard l'un des six tiroirs et on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C_2 ?

2) On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ?

Exercice 48.

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes ($n \geq 2$). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente.

1) Quelle est la probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ?

2) Quelle est la probabilité que les deux amis soient distants de r places (i.e. séparés par $r - 1$ personnes).

Exercice 49.

Deux étudiants se préparent à un examen. Trois professeurs, (Cosinus, Tournesol et Maboul) notés C , T et M sont susceptibles de donner le sujet. Les anciens élèves ont évalué à :

- $p(C) = 0,4$ la probabilité pour que ce soit le docteur A qui pose l'examen,
- $p(T) = 0,25$ la probabilité pour que ce soit le docteur B qui pose l'examen,
- $p(M) = 0,35$ la probabilité pour que ce soit le docteur C qui pose l'examen,

Par ailleurs, les étudiants redoutent tout particulièrement que le sujet porte sur le chapitre d'arithmétique que nous noterons A . Fins psychologues, ils estiment que la probabilité pour que le chapitre A sorte est :

- de 0,1 si c'est Cosinus qui pose le sujet,
- de 0,82 si c'est Tournesol qui pose le sujet,
- de 0,4 si c'est Maboul pose le sujet.

Le jour de l'examen arrive, et les étudiants découvrent que le sujet porte sur l'arithmétique. Calculer les probabilités que le sujet ait été posé par Cosinus, par Tournesol, par Maboul.

Exercice 50.

Un professeur se trouve en possession de cinq clés de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses cinq clés, deux n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clés est effectué au hasard et sans remise.

On appelle clé numéro k la clé utilisée au k^{e} essai.

On appelle D_i l'évènement : "la clé numéro i n'ouvre pas la porte".

- 1) Calculer $p(D_1)$.
- 2) Calculer $p(D_2)$ et $p_{D_1}(D_2)$.
- 3) En déduire $p(D_1 \cap D_2)$.
- 4) Quelle est la probabilité que les clés 1 et 2 ouvrent la porte, mais pas la 3.
- 5) On note $E_{i,j}$ l'évènement : "les clés qui n'ouvrent pas la porte sont les clés i et j ".

- a) Calculer $p(E_{2,4})$.
- b) Calculer $p(E_{4,5})$.

Exercice 51.

Deux archers A_1 et A_2 disputent un match. Les archers A_1 et A_2 tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche; A_1 tire en premier.

Pour tout $i \in \{1, 2\}$, l'archer A_i touche la cible avec la probabilité $p_i \in]0, 1[$, et on note $q_i = 1 - p_i$. Les tirs sont indépendants. On remarquera que A_1 tire les rangs impairs.

On note G_i l'évènement : " A_i l'emporte".

- 1) Calculer la probabilité que A_1 l'emporte au rang $2n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$?
- 2) Calculer la probabilité que A_2 l'emporte au rang $2n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$?
- 3) En déduire $p(G_1)$ et $p(G_2)$ puis la probabilité que le jeu dure indéfiniment.
- 4) Déterminer une relation entre p_1 et p_2 pour que le jeu soit équitable.
- 5) Que peut-on dire si $p_1 > \frac{1}{2}$?

Exercice 52.

On étudie la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes :

- (H_1) Le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures.
- (H_2) Le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente.
- (H_3) Le rat se souvient des deux dernières expériences.

Avec quelle probabilité la première tentative réussit-elle la première? la deuxième? la troisième? la k^e ?

Exercice 53.

On considère trois lots d'articles de même type, le premier compte n_1 articles défectueux et m_1 bons articles; le deuxième, n_2 articles défectueux et m_2 bons articles et le troisième, n_3 défectueux et m_3 défectueux.

On choisit au hasard l'un des lots pour en tirer au hasard deux articles, le premier est défectueux. Quelle est la probabilité que le second article soit défectueux lui aussi?

Exercice 54.

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A , sinon il tire au hasard une boule de l'urne B .

- 1) Soit R l'évènement "le joueur obtient une boule rouge". Calculer $p(R)$.
- 2) Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Exercice 55.

Une urne contient n_1 boules portant le numéro 1, n_2 boules portant le numéro 2, ... n_p boules portant le numéro p . Le nombre de boules dans l'urne est donc $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

On tire les N boules successivement et sans remise en notant le numéro sorti à chaque tirage. Combien de p -listes différentes obtient-on ainsi?

Exercice 56.

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50€.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est 0,2, s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est 0,05.

Pour tout entier naturel non nul n , on appelle R_n l'évènement : "l'employé est en retard le jour n ". On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

- 1) Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
- 2) Déterminer $p(R_n \cap R_{n+1})$ en fonction de p_n et $p(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$ en fonction de q_n .
- 3) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n .
- 4) En déduire p_{n+1} en fonction de p_n .
- 5) Exprimer p_n en fonction de n et trouver sa limite.

Exercice 57. *Le jeu du Franc-Carreau de Buffon(1707-1788)*

On jette une pièce de diamètre d sur un carrelage dont chaque carreau a pour côté c .

- 1) Quelle est la probabilité que la pièce soit "à franc-carreau" (i.e. sans couper un joint) ?
- 2) Quel doit être le rapport $\frac{d}{c}$ pour que le jeu soit équitable ?
- 3) Mêmes questions si les carreaux sont des hexagones réguliers de côtés a et d'apothème $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Exercice 58. *Les monozygotes.*

D'après les relevés statistiques, la probabilité d'avoir des jumeaux monozygotes est de $\frac{1}{250}$.

Celle d'avoir des triplets monozygotes est de $\frac{1}{160\,000}$.

Celle d'avoir des quadruplets monozygotes est de $\frac{1}{13\,000\,000}$ (dernier cas recensé en 2010).

Celle d'avoir des quintuplets monozygotes est de $\frac{1}{57\,000\,000}$ (dernier cas recensé en 1934).

Ces chiffres sont-ils cohérents avec les probabilités ?



Solutions des exercices

Exercice 1.

Il suffit de voir que $p(A \cap B) \leq p(A)$. Et en supposant $p(A) \leq p(B)$, on trouve

$$p(A \cap B) - p(A)p(B) \leq p(A) - p(A)^2.$$

Une rapide étude de la fonction $f : x \mapsto x - x^2$ sur $[0; 1]$ montre que son maximum vaut $\frac{1}{4}$ atteint en $\frac{1}{2}$. (De même par symétrie pour $p(B) \leq p(A)$). Ainsi, l'égalité est vérifiée en prenant par exemple $A = B$ et $p(A) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2.

$$1) p = \frac{\binom{30}{n-2}}{\binom{32}{n}}.$$

2) A chaque tirage, la probabilité de découvrir la supercherie est $p = \frac{3}{248}$. On veut donc résoudre $\left(\frac{245}{248}\right)^N \leq 0,05$, ce qui donne $N \simeq 246$.

Exercice 3.

Paradoxalement, il faut commencer par le jeu où on est le plus faible !

Soit e la proba que je gagne aux échecs et p celle que je gagne aux pouces. On a, d'après le texte, $p < e$. La probabilité d'avoir au moins deux victoires successives dans la séquence P/E/P est $pep + pe(1-p) + (1-p)ep = pe(2-p)$. De même, dans la configuration E/P/E, on trouve $pe(2-e)$ qui est plus grand que $pe(2-p)$. Donc il vaut mieux commencer par les Pouches !

Exercice 4.

Il suffit de faire un arbre (monstrueux). On note A l'évènement obtenir 1, B obtenir 2, C obtenir 4 et D obtenir 3, 5 ou 6.

On a $p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{6}$ et $p(D) = \frac{1}{3}$.

On discute des cas : Tout d'abord les trois dés sont corrects :

- $p(A_1^3 \cup B_1^3 \cup C_1^3) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{72}$,
- $p(A_1^2 B_1 \cup A_1^2 C_1 \cup B_1^2 A_1 \cup B_1^2 C_1 \cup C_1^2 A_1 \cup C_1^2 B_1) = 3 \times 6\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{12}$,
- $p(A_1 B_1 C_1) = 3!\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$,

Seulement deux sont bons :

- $p(A_1^2 D_1 \cup B_1^2 D_1 \cup C_1^2 D_1) = 3 \times 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$,
- $p(A_1 B_1 D_1 \cup A_1 C_1 D_1 \cup B_1 C_1 D_1) = 3 \times 3!\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,

Un seul de bon :

- $p(A_1 D_1^2 \cup B_1 D_1^2 \cup C_1 D_1^2) = 3 \times 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$,

Aucun :

- $p(D_1^3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Avec les probabilités totales, on trouve :

$$\begin{aligned} p(A_2 B_2 C_2) = & \underbrace{p(A_1 B_1 C_1)}_{\frac{1}{36}} + \underbrace{p(A_1^2 B_1 \cup A_1^2 C_1 \cup B_1^2 A_1 \cup B_1^2 C_1 \cup C_1^2 A_1 \cup C_1^2 B_1)}_{\frac{1}{12}} \times p_1 + \\ & \underbrace{p(A_1 B_1 D_1 \cup A_1 C_1 D_1 \cup B_1 C_1 D_1)}_{\frac{1}{6}} \times p_1 + \underbrace{p(A_1 D_1^2 \cup B_1 D_1^2 \cup C_1 D_1^2)}_{\frac{1}{6}} \times p_2 + \underbrace{p(A_1^2 D_1 \cup B_1^2 D_1 \cup C_1^2 D_1)}_{\frac{1}{12}} \times p_2 + \\ & \underbrace{p(A_1^3 \cup B_1^3 \cup C_1^3)}_{\frac{1}{72}} \times p_2 + \underbrace{p(D_1^3)}_{\frac{1}{27}} \times p_3. \end{aligned}$$

avec p_i la probabilité d'obtenir i valeurs demandées avec i dés. On a donc $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$ et $p_3 = p(A_1 B_1 C_1) = \frac{1}{36}$.

$$\text{A.N. : } p(A_2 B_2 C_2) = \frac{331}{3888} \simeq 0,085.$$

Exercice 5.

1) Chaque cœur restant (il y en a 3) a la même probabilité de se retrouver dans les mains d'un des trois autres joueurs. Le nombre de répartitions possibles total (avec ordre, avec remise) est donc 3^3 . Les répartitions qui font qu'elle se fera couper sont $(0, 0, 3)$ ou $(0, 1, 2)$. Mais il n'y a que trois dispositions pour la première et six pour la seconde. Soit au total une probabilité que l'un des trois autres joueurs

n'ait pas de cœur de $\frac{9}{3^3} = \frac{1}{3}$.

2) La seule nuance est que son partenaire ne va pas la couper a priori. Donc, dans le premier cas, il y a toujours trois répartitions pour qu'elle se fasse couper et n'y en a plus que quatre pour la seconde pour qu'un adversaire n'ait pas de cœur. Soit une probabilité de $\frac{7}{27}$

3) On recommence pour trouver

n	Répartition	Nb de possibilités
4	$(0, 0, 4)$	3
	$(0, 1, 3)$	$6 - 2 = 4$
	$(0, 2, 2)$	$3 - 1 = 2$
3	$(0, 0, 5)$	3
	$(0, 1, 4)$	$6 - 2 = 4$
	$(0, 2, 3)$	$6 - 2 = 4$
2	$(0, 0, 6)$	3
	$(0, 1, 5)$	$6 - 2 = 4$
	$(0, 2, 4)$	$6 - 2 = 4$
	$(0, 3, 3)$	$3 - 1 = 2$
1	$(0, 0, 7)$	3
	$(0, 1, 6)$	$6 - 2 = 4$
	$(0, 2, 5)$	$6 - 2 = 4$
	$(0, 3, 4)$	$6 - 2 = 4$

n	1	2	3	4	5
Proba de se faire couper	$\frac{15}{3^7} = \frac{5}{729}$	$\frac{13}{3^6} = \frac{13}{729}$	$\frac{11}{3^5} = \frac{11}{243}$	$\frac{9}{3^4} = \frac{1}{9}$	$\frac{7}{3^3} = \frac{7}{27}$
Valeurs approchées	0,007	0,018	0,045	0,111	0,259

Exercice 7.

Nombre d'issues possibles : $7^3 = 343$. Nombres d'issues gagnantes : 7. D'où la probabilité : $p = \frac{1}{49}$.

Exercice 9.

1) On a facilement $p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{2}$.

2) On trouve facilement une récurrence en dénombrant les branches de l'arbre :

$$p_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n} \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} \frac{1}{ij} + \dots + \frac{1}{n} \prod_{2 \leq k \leq n-1} \frac{1}{k}.$$

Il suffit de prouver que cela vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 10.

L'univers Ω est l'ensemble des applications d'un ensemble à 4 éléments dans un ensemble à 6 éléments, soit $\text{card}(\Omega) = 6^4$.

On cherche l'évènement contraire de ce que l'on veut à savoir : "toutes les personnes descendent à des étages différents". (il s'agit du nombre d'injections) soit $A_6^4 = 360$. D'où la probabilité cherchée : $p = 1 - \frac{360}{6^4} = \frac{13}{18} \simeq 0,72$.

Exercice 11.

$$p = p(B^2) + p(V^2) = \frac{6}{10} \times \frac{N}{16+N} + \frac{4}{10} \times \frac{16}{16+N} = \frac{58}{100}. \text{ Ce qui donne } \boxed{N = 144}.$$

Exercice 12.

1) Si H est le nombre d'Hannibal corrigeant le même exercice, on a $P(H = 4) = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{3}$.

2) Il manque $P(H = 3) = \frac{\binom{8}{3}\binom{2}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{8}{15}$ et $P(H = 2) = \frac{\binom{8}{2} \times 1}{\binom{10}{4}} = \frac{2}{15}$.

3) Avec la formule des probabilités totales :

- Si $(H = 4)$, on cherche la probabilité p_1 où les quatre Hannibal corrigent les mêmes classes (deux possibilités : classes 1 à 4 ou 5 à 8). Soit une probabilité de $p_1 = \frac{2}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{35}$. Il reste à multiplier par le choix de la classe, $\frac{4}{10}$.

- Si $(H = 3)$, une classe ne peut pas être corrigée par quatre Hannibal l'intersection étant vide.

- Si $(H = 2)$, pour qu'une classe soit corrigée que par des Hannibal (deux au total), elle ne peut être que la classe 9 ou 10, soit une probabilité de $\frac{2}{10}$.

Ainsi, la probabilité cherchée est :

$$p = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{35} \times \frac{4}{10} \right) + \frac{8}{15} \times 0 + \frac{2}{15} \left(\frac{2}{10} \right) = \boxed{\frac{16}{525}}.$$

4) $p' = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{210}{525}$

5) Le premier.

Exercice 14.

On imagine que les dés sont tous distincts (coloriés en vert pomme, jaune poussin, bleu outremer, vermillon, fuchsia, gentiane et vieux rose par exemple). $\text{card}(\Omega) = 6^7$ et $\text{card } E = 7! \times 6 \times \frac{1}{2} = 3 \times 7!$ en choisissant la valeur doublée (le 6 de la formule) et en divisant par l'ordre sur ces deux valeurs (le $\frac{1}{2}$ de la formule). Soit au total $p = \frac{35}{648}$.

Exercice 38.

1) Soit X le nombre de personnes se présentant au guichet entre 10h et 11h. On calcule en minutes. La variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,1$. On approche X par une loi de Poisson $\mathcal{P}(6)$ car $E(X) = np = 60 \times 0,1 = 6$.

On a donc $p(X = k) = \frac{6^k e^{-6}}{k!}$. De façon générale $p(X = k - 1) = \frac{k^{k-1} e^{-k}}{(k-1)!} = \frac{k^k e^{-k}}{k!} = p(X = k)$.

2) On cherche $p(X \geq 10) = 1 - \sum_{k=0}^9 \frac{6^k e^{-k}}{k!} \simeq 0,08$.

Exercice 39.

La probabilité $p = \frac{1}{100}$ étant très faible, on peut utiliser une loi de Poisson de paramètre $100p = 1$. On cherche alors $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - e^{-1} \simeq 0,86$. Et $p(X = 2) \simeq 0,14$.

Exercice 40.

- 1) On trouve avec les probabilités totales $p = 0,505$.
- 2) On trouve $p = 0,55446$.
- 3) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$. L'espérance est donc $E(X) = 4$.
- 4) $p(X = 5) \simeq 0,103$.

Exercice 41.

Soit X le nombre de personnes mesurant plus de 1m90 parmi 100 personnes. Alors X suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{100}{80}$. Et $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 0,714$.

Sur 300 personnes, on trouve $p(Y \geq 1) = 1 - e^{-\frac{300}{80}} \simeq 0,976$.

Exercice 51.

$$4) p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$$

Exercice 56.

$$4) p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n.$$

Exercice 57.

- 1) On doit avoir $d < c$ et alors, la surface favorable est un carré de côté $c - d$, donc d'aire $(c - d)^2$. La surface défavorable est d'aire $c^2 - (c - d)^2$.

La probabilité cherchée est donc $p = \frac{(c - d)^2}{c^2}$.

- 2) Le jeu est équitable si et seulement si $p = \frac{1}{2}$. On trouve $\frac{d}{c} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \simeq 0,292$.

- 3) L'hexagone central a une aire de $\frac{3(a - \frac{d}{\sqrt{3}})^2 \sqrt{3}}{2}$. Le jeu est équitable si $\left(a - \frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{d}{\sqrt{3}} \left(2a - \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$.

Ce qui donne $\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{2}) \simeq 0,507$.

