#301

Dénombrements

Exercice 1. 𝅘𝅥𝅯
Valentin, un de mes anciens élèves s'est lancé dans la fabrication et la vente de T-shirts avec un joli logo qui représente une jeune fille serveuse à la longue chevelure (brune, blonde ou rousse) qui porte un plateau avec une bière (brune, blonde ou rousse). Combien existe-t-il de T-shirts différents ?

Exercice 2. ♩ *(Kangourou 2015)*
On colorie les nombres de 1 à 5 soit en rouge, soit en bleu en respectant la consigne : la somme de deux nombres différents de la même couleur est, elle aussi, un nombre de la même couleur. De combien de manières différentes peut-on colorier les cinq nombres ?

Exercice 3. ♪
Parmi quarante secrétaires, huit connaissent le russe, quinze l'anglais et neuf l'allemand. D'autre part, quatre parlent l'anglais et l'allemand, cinq l'anglais et le russe, deux l'allemand et le russe et deux parlent les trois langues.
Combien de secrétaires ne connaissent aucune de ces trois langues ?

Exercice 4. ♩
A l'aide des neuf chiffre $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9, combien peut-on écrire
1) De nombres de trois chiffres ? Quelle est leur somme ?
2) De nombres de trois chiffres distincts ? Quelle est leur somme ?
3) De nombres de six chiffres distincts ?
4) On range les nombres de six chiffres distincts précédents par ordre croissant. Quel est le plus petit de ces nombres ? Quel est le 25^{e} ? Quel est le rang du nombre 124356 ?

Exercice 5. ♪
On considère un pavage carré à n lignes et n colonnes. On dispose de p jetons tous identiques.
1) Combien y a-t-il de dispositions différentes des jetons sachant que les p jetons doivent être sur des cases différentes ?
2) Combien y a-t-il de dispositions différentes des jetons sachant que les p jetons doivent être sur des cases différentes avec un jeton par ligne et un jeton par colonne au maximum ?

Exercice 6. 𝅘𝅥𝅯
Déterminer le nombre de suites croissantes d'entiers $a_1, \dots, a_n$ avec $n \geq 4$ telles que $a_1 = 1$, $a_4 = 4$ et il existe (k, l) tel que $a_k = 2$ et $a_l = 3$.

Exercice 7. ♩ *Un sport ! Un vrai ! Le curling !*
Au curling, deux équipes de quatre s'affrontent, chaque joueur jetant deux pierres de façon à être le plus près possible de la cible. A la fin des lancers, on compte le nombre de pierres gagnantes comme à la pétanque.
1) Si on a huit joueurs, combien de matchs peut-on organiser ?
2) Sur les huit pierres disponibles pour l'équipe A, il y en a deux fêlées. De combien de façon le premier joueur peut faire ses deux lancers avec une seule pierre fêlée.
3) En trois manches, l'équipe A a marqué 6 points. Quelles sont les répartitions possibles des points de l'équipe A pour les trois manches consécutives ?

Exercice 8. ♪

Florent possède deux flotteurs, trois wishs et quatre voiles.
De combien de façons peut-il s'équiper ?

Exercice 9. ♪

En informatique, le système de classification des couleurs RVB utilise les trois couleurs primaires Rouge, Vert Bleu [1]. Pour coder les couleurs on affecte à chacune des trois couleurs primaires un octet (soit une valeur sur les 256 possibles de 0 à 255).

Sachant que l'oeil humain est capable de différencier un demi-million de couleur et d'en reconnaître 30 000, est-ce que le codage est assez important pour coder toutes les nuances perceptibles ?

Exercice 10. ♪ *(OFM 2016)*

2016 points sont alignés sur une droite ? De combien de manières peut-on les colorier en rouge ou bleu, de sorte que deux points voisins quelconques soient de couleur différente, et que chaque couleur soit utilisée au moins une fois ?

Exercice 11. 𝅗𝅥 *(Collègue d'anglais - extrait de journal américain)*

Texte original : *Taking a leaf out of Major's book, Mrs Maguire decided to number her six good pupils from 1 to 6 and her bad pupils from 1 to 4 and put all to into a single line. No two baddies were to be next to each other. The goodies had to be lined up from left to right in increasing order ; and the baddies from left to right in decreasing order. How many ways are there of doing that ?*

Dans une classe de dix élèves, il y a six "bons" et quatre "mauvais". Les bons sont numérotés de 1 à 6 et les mauvais de 1 à 4. On aligne les élèves dans l'ordre croissant pour les bons et décroissant pour les mauvais. Sachant que deux mauvais ne doivent pas être à côté, de combien de façons peut-on les ranger ?

Exercice 12. 𝅗𝅥 *Le 960-Chess (Fisher Random)*

Dans cette variante du jeu d'échecs proposée par Bobby Fisher, les pièces majeures sont placées sur la dernière rangée avec seulement trois règles :

- Les deux fous sont sur des cases de couleurs opposées,
- Le roi est entre les deux tours,
- Les pièces noires sont placées symétriquement face aux pièces blanches.

Pourquoi l'appelle-t-on le 960 ?

Exercice 13. ♩ *(The New York Times 2010)*

Taking a leaf out of Major Major's book, Mrs Maguire decided to number her six good pupils from 1 to 6 and her bad pupils from 1 to 4 and put all ten into a single line. No two baddies were to be next to each other. The goodies had to be lined up from left to right in increasing order and the baddies from left to right in decreasing order.

How many ways are there of doing that ?

1. Il s'agit du **système additif** car l'on projette les couleurs avec un projecteur à la différence du système soustractif que l'on retrouve pour le peintre qui mélange ses trois couleurs primaires qui sont Rouge, Jaune et Bleu à la lumière du jour.

Exercice 14. ♩ *(OFM 2016)*

Un palindrome est un nombre dont l'écriture décimale ne change pas si on inverse l'ordre des chiffres. Par exemple, 3773 est palindrome (mais pas 0770). Un nombre à quatre chiffres $(abcd)_{10}$ est dit **équilibré** si $a+b=c+d$. Par exemple, 2736 est équilibré.

Déterminer tous les nombres équilibrés à quatre chiffres qui sont somme de deux palindromes à quatre chiffres.

Exercice 15. 𝅗𝅥 *(FFJM 2021 - $\frac{1}{4}$ finale)*

Dans l'espace, on se donne cinq points en position générale (i.e trois d'entre eux ne sont jamais alignés et quatre d'entre eux ne sont jamais coplanaires). Si l'on considère toutes les paires de plans obtenus à partir de trois de ces cinq points, combien de droites d'intersection obtient-on ?

Exercice 16. 𝅗𝅥 *(TFJM 2019)*

Un grand père a n petits-enfants. Il les ordonne par âge et commence la distribution des chocolats. Il possède k boîtes contenant respectivement $a_1, a_2, \dots, a_k$ chocolats. Il donne la première boîte au premier de ses petits-enfants qui prend un chocolat et passe la boîte au suivant et ainsi de suite, le dernier repassant la boîte au premier jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chocolats dans la boîte.

Ensuite, il y a deux configurations :

- A : Le grand-père donne la boîte à l'enfant suivant le dernier ayant mangé.
- B : Le grand père donne la deuxième boîte au deuxième petit-enfant et ainsi de suite.

1) Dans une première partie, on suppose que les a_i sont tous égaux.

a) Dans la configuration A, est-il possible que la répartition soit équitable à un moment ? Quels moments ?

b) Dans la configuration B, est-il possible que la répartition soit équitable à un moment ?

2) Même question si on suppose que $a_i = i$ pour tout i.

3) Dans cette partie, on pose que tous les a_i sont distincts. Est-il possible que la répartition ne soit jamais équitable ?

Exercice 17. ♩ *(MEJ 2019)*

Anaïs et Briac se présente pour représenter les 30 élèves de la classe à la course d'escargot. Au final, Anaïs a gagné avec 20 votes pour elle et 10 pour Briac.

Lors du dépouillement, l'assesseur lit les bulletins un à un.

1) Quel est le nombre de tirages différents ?

2) Quel est le nombre de tirages pour lesquels Anaïs a toujours été devant Briac ?

Exercice 18. ♩

1) Déterminer le nombre d'injections d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments.

2) Soit E un ensemble à n éléments, calculer $\sum\limits_{X \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{card} X$.

Exercice 19. ♪ *(Animath 2018)*

Soit S un sous-ensemble de $[\![1, 30]\!]$ tel que la somme de éléments distincts de S n'est jamais divisible par 5. Combien d'éléments un tel ensemble S peut-il avoir au maximum ?

Exercice 20. ♪

Dans sa bibliothèque, Donald possède trois livres de géographie, deux livres d'économie et un de politique pour les nuls.

1) S'il les range de façon aléatoire sur l'unique étagère de sa bibliothèque, de combien de façons peut-il le faire ?

2) Il se rend compte finalement qu'il a trois fois le même livre de géographie (manuel de quatrième) et deux fois le même livre d'économie. De combien de façons peut-il les ranger ?

3) Et si l'on suppose qu'il ne sépare jamais les livres de géographie ?

Exercice 21. ♪

1) De combien de façons peut-on colorier un drapeau en trois bandes de couleurs à l'aide des trois couleurs : bleu, blanc, rouge ? On demande seulement que l'on puisse distinguer les trois bandes une fois colorié.

2) Idem mais avec n bandes.

Exercice 22. ♩

Un club de tennis regroupe huit joueurs. Ils souhaitent organiser un tournoi au format coupe : quatre quarts de finales, deux demi-finales et finale. On imagine la coupe complète jusqu'au vainqueur. Combien de coupes différentes peut-on organiser ?

Exercice 23. ♪

Combien existe-t-il de triplets d'entiers distincts de $[\![1, 100]\!]$ tels que la moyenne de deux d'entre eux soit égale au troisième.

Exercice 24. ♪

On a quatre garçons et sept filles. On veut constituer une équipe de football pour participer au tournoi du lycée. Les règles sont strictes : il faut cinq joueurs et au moins trois garçons. D'autre part, Albertine et Albert refusent de jouer ensemble.

Combien d'équipes peut-on former ?

Exercice 25. ♪

Sur 100 étudiants, 65 ont réussi l'anglais, 77 les mathématiques et 74 le français. En outre, au plus 47 ont réussi le français et l'anglais, au plus 51 le français et les mathématiques ; enfin 57 l'anglais et les mathématiques.

Quel est le nombre maximal d'étudiants ayant réussi les trois matières ?

Exercice 26. 𝅗𝅥 *Champions League 2018-2019*

Lors de la phase de poules, deux clubs par poule sont qualifiés pour les 8^e^ de finale (il y a donc huit poules ! !). Un tirage est organisé parmi les 16 équipes. Les matchs doivent répondre à trois règles :

i. Opposer un premier et un deuxième de poule.
ii. Ne pas être un match déjà joué lors des phases de poule.
iii. Ne pas voir s'opposer deux équipes d'un même pays.

Voici le tableau des clubs qualifiés.

Poule	A	B	C	D
Premier	Dortmund	Barcelona	PSG	Porto
Deuxième	Athletico Madrid	Tottenham	Liverpool	Schalke
Poule	E	F	G	H
Premier	Bayern	Manchester C.	Real Madrid	Juventus
Deuxième	Ajax	Lyon	Roma	Manchester U.

1) Combien de configurations différentes existe-t-il pour les huitièmes de finale si on ne tient pas compte des règles ?

2) Si on ne tient compte que de la première règle ?

3) Si on ne tient compte que des deux premières ?

4) Si on tient compte de toutes les règles ?

On donne les nationalités des clubs : Athletico, Réal et Barcelona (Espagne), PSg et Lyon (France), Schalke, Dortmund et Bayern (Allemagne), Liverpool, Manchester U., Manchester C. et Tottenham (G.-B.), Juve et Roma (Italie), Ajax (Hollande), Porto (Portugal).

Exercice 27. ♩

On suppose que $\operatorname{card} E = n$. Que vaut $S = \sum_{A \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{card} A$? (trois preuves)

Exercice 28. ∘

1) De combien de façons peut-on remplir au hasard une grille de 9×9 avec 9 fois chacun des chiffres de $[\![1, 9]\!]$?

2) Parmi ces grilles, combien correspondent effectivement à des grilles de Sudoku ?

Exercice 29. ♩

Quel est le nombre de suites croissantes de n termes dans $[\![1, n]\!]$?

Exercice 30. ♩

1) On se donne 100 droites en position générale (i.e. non parallèles et non concourantes). En combien de secteurs a-t-on partagé le plan ?

2) Bonus : Combien faut-il de couleur pour colorier les secteurs sans que deux secteurs liés par un segment soient de même couleur ?

Exercice 31. ♩

Un nombre entier naturel est dit **ascendant** s'il contient au moins deux chiffres et si chaque chiffre est strictement plus petit que tous les chiffres à sa droite.

Combien existe-t-il de nombres ascendants possédant au plus neuf chiffres ?

Exercice 32. ♩

Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y$ soit un singleton ?

Exercice 33. ♩ *($\frac{1}{2}$-finale FFJM 2018)*

Les nombres descendants : Un nombre à plusieurs chiffre du deuxième chiffre (en partant de la gauche) est inférieur ou égal à tous les chiffres situés à sa gauche. Ainsi, les nombres 764, 322 et 555 sont descendants, mais pas 823.

Combien existe-t-il de nombres descendants à trois chiffres.

Exercice 34. ♩

A l'EuroMillions, on doit cocher cinq numéros de $[\![1, 50]\!]$ et deux étoiles de $[\![1, 11]\!]$. Un ticket est gagnant si au moins deux numéros sont bons, ou si un numéro et au moins deux étoiles sont bons. Le reste est perdant.

Quelle est la probabilité de perdre ?

Exercice 35. ♩

Soit E un ensemble à n éléments : on se propose de calculer $S = \sum_{(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2} \operatorname{card}(X \cap Y)$.

1) Méthode 1 :

a) Pour toute partie $Z \in \mathscr{P}(E)$ à k éléments, rechercher le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cap Y = Z$.

b) En déduire la valeur de S.

2) Méthode 2 :

a) Soient X et Y des parties de E. Montrer que $\{X \times Y, X \times \overline{Y}, \overline{X} \times Y, \overline{X} \times \overline{Y}\}$ forme une partition de E^2.

b) Retrouver la valeur de S en utilisant l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathscr{P}(E))^2 & \longrightarrow & (\mathscr{P}(E))^2 \\ (X, Y) & \longmapsto & (X, \overline{Y}) \end{array}$ dont on montrera la bijectivité.

Exercice 36. ♩

Quel est le nombre d'anagrammes de PERMUTATION avec les voyelles dans l'ordre alphabétique ?

Exercice 37. ♩

Combien existe-t-il de triplets d'entiers $(x, y, z) \in (\mathbb{N}\backslash\{0\})^3$ tels que $x + y + z = 60$.

Exercice 38. ♩

Sheldon a eu un train pour son Noël. Il peut mettre bout à bout des wagons identiques de 10cm et de 20cm. Il veut construire un train de 150cm de long avec sa locomotive préférée devant. De combien de façons peut-il le faire ?

Exercice 39. ♩

Quel est le nombre de mots de douze lettres sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ contenant un nombre pair de 'd' ?

Exercice 40. ♩

On voudrait savoir quel est le nombre de permutations des entiers 1 à 8 de sorte que deux nombres consécutifs ne se succèdent jamais (i.e. 32 est possible, mais pas 23).

Exercice 41. *Nombres de Catalan*

Soient $x_1, \dots, x_n$ n réels. Pour calculer la somme $x_1 + \cdots + x_n$, on place des parenthèses de façon à n'avoir que des additions de deux nombres à effectuer. Soit t_n le nombre de manières de placer les parenthèses (on pose $t_1 = 1$).

1) Déterminer t_2, t_3, t_4.

2) Trouver une relation de récurrence entre t_n et $t_1, \dots, t_{n-1}$.

Exercice 42. ♪

1) On considère n points distincts du plan en position générale (trois points quelconques ne sont pas alignés). Combien ces points déterminent-ils

- **a)** de segments ?
- **b)** de triangles ?
- **c)** de quadrilatères ?
- **d)** de polygônes à p côtés ?

2) Soit un polygône à n côtés.

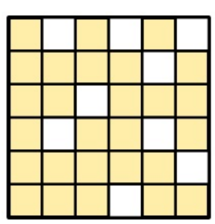
- **a)** Quel est le nombre de diagonales de ce polygône ?
- **b)** En combien de points intérieurs au polygône se coupent-elles ?

Exercice 43. *Grilles de Fleissner*

Dans le livre de Jules Verne, *Mathias Sandorf* est utilisé un codage à base de grilles, dites grilles de Fleissner du nom d'un colonnel autrichien ayant écrit un livre de cryptographie au XIXe siècle.

Si l'on considère une grille de Fleissner 6×6, il s'agit d'un carré constitué de 36 petits carrés. On découpe alors 9 de ces petits carrés de sorte que, si l'on tourne la grille d'un quart, un demi ou trois quarts de tours, les trous ne se superposent jamais.

Pour coder, on pose la grille sur une feuille, on écrit le début du message dans les neuf trous puis on fait une rotation quart de tour et on écrit la suite jusqu'à avoir fait un tour complet. On obtient alors le message.



C	I	U	L	I	E
R	C	M	C	S	E
M	C	T	N	E	E
T	V	R	T	R	T
D	E	R	E	O	A
X	P	E	I	R	D

Il est dit que l'on peut créer 262 144 grilles différentes. Est-ce vrai ?

Exercice 44. *Permutations de couples*

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions ...

1) au total ?
2) en respectant l'alternance des sexes ?
3) sans séparer les couples ?
4) en remplissant les deux conditions précédentes ?

Exercice 45. *Parties ne contenant pas d'éléments consécutifs*

1) Combien y a-t-il de parties à p éléments de $\{1,\ldots,n\}$ ne contenant pas d'éléments consécutifs ? (Indication : Si $\{x_1,\ldots,x_p\}$ est une telle partie avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$, considérer l'ensemble $\{x_1-1,\ldots,x_p-p\}$)
2) Soit t_n le nombre de parties de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal quelconque sans éléments consécutifs.
a) Montrer que $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$, $t_{2n+1} = t_n^2 + t_{n-1}^2$, et $t_{2n} = t_n^2 - t_{n-2}^2$.
b) Calculer t_{50}.

Exercice 46. ♩

Soit E un ensemble de cardinal n. On note Γ_n^p le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments de E.

1) Calculer Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_n^3.
2) Soit $x \in E$. Combien de fois x figure-t-il dans l'ensemble des combinaisons avec répétition de p éléments de E ?
3) Montrer que $\dfrac{p}{n}\Gamma_n^p = \dfrac{n+p-1}{n}\Gamma_n^{p-1}$.
En déduire Γ_n^p.
4) Application : Combien y a-t-il de suites de n entiers naturels dont la somme est égale à p ?

Exercice 47. *Les trous de Kaplansky*

Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Quels est le nombre de p-listes croissantes $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ de $[\![1,n]\!]$ telles qu'entre deux termes consécutifs il y ait au moins k entiers, c'est-à-dire telles que $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $x_{i+1} - x_i > k$.

Exercice 48. 𝅗𝅥

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $p \in \mathbb{N}$ quel est le nombre de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ de cardinal p ne contenant aucun couple d'entiers consécutifs ?

Exercice 49.

Neuf voyageurs attendent le train pour Libourne en gare de Bordeaux.

1) S'ils ont tous des billets de 2^{nde} classe et qu'ils ont le choix entre cinq wagons de 2^{nde} classe, calculer le nombre de manières de répartir ces voyageurs entre ces cinq wagons.
2) Si trois d'entre eux, seulement, ont des billets de $1^{\text{ère}}$, qu'il y a deux wagons de $1^{\text{ère}}$ classe et cinq wagons de 2^{nde} classe, calculer le nombre de façons de répartir ces voyageurs entre les wagons.
3) On sait maintenant que sur les cinq wagons de 2^{nde} classe il reste neuf places seulement.
a) Combien de répartitions possibles de ces places entre ces wagons peut exister ?
b) Cette répartition étant connue du contrôleur et si tous les voyageurs sont eu deuxième classe, de combien de façons différentes peut-il les installer ?

Exercice 50.

L'alphabet est composé de 26 lettres dont 6 voyelles. On appelle mot toute suite de lettres ayant un sens ou non.

1) Combien existe-t-il de mots de quatre lettres ?

2) Combien existe-t-il de mots de quatre lettres constitués de quatre lettres différentes ?
3) Combien existe-t-il de mots de quatre lettres commençant et se terminant par une voyelle ?
4) Combien existe-t-il de mots de quatre lettres contenant au moins une voyelle ?
5) Combien existe-t-il de mots de quatre lettres écrits uniquement avec les lettres A et B, chaque lettre apparaissant au moins une fois ?
6) Combien existe-t-il de mots de quatre lettres constitués d'exactement deux lettres différentes ?

Exercice 51.

A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches : trois lettres : A, B et C et les neufs chiffres non nuls. Le code de l'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres pouvant être répétés.

1) Combien existe-t-il de codes différents ?
2) Combien y a-t-il de codes
  a) Comportant au moins le chiffre 7 ?
  b) Pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
  c) Pour lesquels les quatre chiffres sont différents ?
  d) Pour lesquels les quatre chiffres forment une suite strictement croissante ?

Exercice 52. *Concours Général 2012 Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées* $1, 2, \ldots, n$ *où* n *est un entier supérieur ou égal à* 2. *Le facteur doit distribuer une lettre par maison. Pour cela, il laisse son vélo à la maison 1, y dépose le courrier correspondant, et ensuite distribue les lettres au hasard, puis revient à la maison 1 récupérer son vélo. Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé le courrier.*

Par exemple, si $n = 5$, un trajet possible est $1, 5, 2, 4, 3, 1$. La distance totale parcourue, appelée longueur du trajet, vaut 12 dans ce cas car $|?5 - 1| + |2 - 5| + |4 - 2| + |3 - 4| + |1 - 3| = 12$.

Un autre trajet possible est $1, 3, 5, 4, 2, 1$ de longueur 8.

1) Combien y a-t-il de trajets possibles ?
2) a) Montrer que tout trajet est de longueur supérieure ou égale à $2(n - 1)$.
  b) Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?
3) a) Dans le cas $n = 5$ et $n = 6$, déterminer la longueur maximale d'un trajet et donner un exemple de trajet de longueur maximale.
  b) Pour n quelconque, déterminer la longueur maximale d'un trajet.
4) On tire un trajet au hasard (tous les trajets sont équiprobables). Quelle est l'espérance de la longueur du trajet ?

Exercice 53. *(Promys 2017)*

n personnes sont réparties dans trois comités de telle sorte que chaque comité ait au moins un membre et personne ne soit dans les trois comités. Une personne n'est donc pas nécessairement dans un comité.

1) Combien faut-il de personnes au minimum ?
2) Si $n = 3$, de combien de façons ceci peut-il être fait ?

Exercice 54. *Nombre de surjections*

1) Déterminer le nombre de surjections d'un ensemble à $n+1$ éléments sur un ensemble à n éléments.
2) On note dans la suite P_n^k le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k classes. Montrer que $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$ pour $2 \leq k \leq n - 1$.
3) Calculer, en fonction de P_n^k le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.
4) Montrer que le nombre de surjections $N_{n,p}$ d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à p éléments est :

$$N_{n,p} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \frac{p!}{i!(p-i)!}(p-i)^n.$$

Exercice 55. ♩ *Tour de magie*

On prend 21 cartes. On fait choisir une carte au public et on leur demande de mélanger.

On récupère les cartes. On en fait trois tas de 7 cartes. On demande au public dans quel tas est la carte. On met ce tas au milieu des précédents. On recommence deux fois de plus. A la fin de la troisième fois, la carte en question est au milieu du dernier tas désigné.

Pourquoi ?

Solutions des exercices

Exercice 1.
$3^2 = 9$.

Exercice 3.
Avec la formule du crible, on trouve 23 secrétaires qui parlent au moins une de ces trois langues et donc $\boxed{17}$ qui n'en parlent aucune.

Exercice 4.
1) On peut écrire 9^3 tels nombres. on peut faire la somme des unités : $81\frac{9\times 10}{2} = 3645$, des dizaines et des centaines, ce qui donne à chaque fois le même résultat, soit une somme de $3645 + 10 \times 3645 + 100 \times 3645 = 3645 \times 111 = \boxed{404\ 595}$.
2) On trouve $A_9^3 = \boxed{504}$ nombres. Avec la même astuce, on somme les nombres en colonnes : $56 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) \times 111 = \boxed{279\ 720}$.
3) $A_9^6 = \boxed{60\ 480}$.
4) Le plus petit est 123456, le 25^e^ est 123564 et 124356 est le 121^e^.

Exercice 5.
1) $\binom{n^2}{p}$.
2) $\binom{n}{p} n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \binom{n}{p} A_n^p$.

Exercice 6.
On choisit la place des premiers rangs avec 2 et 3, soit $\binom{n-2}{2}$.

Exercice 7.
1) $\frac{1}{2}\binom{4}{8} = 35$.
2) Soit la première pierre est fêlée, soit c'est la seconde : $2 \times (2 \times 6) = 24$
3) On met dans l'urne les trois manches que l'on tire six fois avec remises (la même manche pouvant revenir plusieurs fois) et sans ordre (un point reste un point quel que soit sa place dans le tirage). Il s'agit donc de $\Gamma_3^6 = \binom{3+6-1}{3} = 56$

Exercice 8.
$2 \times 3 \times 4 = 24$.

Exercice 9.
$256^3 = 16\ 777\ 216$. Donc oui pour la différenciation et, a fortiori, la reconnaissance.

Exercice 10.
$3 \times 2^{2015} - 6$.

Exercice 11.
En ne respectant que la condition d'ordre, il a $\binom{10}{4} = 210$ façons de le faire. Il reste à enlever les cas défavorables correspondant à deux mauvais côte à côte.
S'il y en a deux côte à côte exactement, on a $3 \times \binom{7}{3} = 105$ possibilités : le coefficient binomial étant le nombre de places pour les trois insertions où vont les mauvais et le facteur trois représentant l'endroit où on en met deux.
S'il y a deux paires de mauvais côté à côte, cela donne $\binom{7}{2} = 21$
S'il y en a trois côte à côte exactement, on a $2 \times \binom{7}{2} = 42$ possibilités.
S'ils sont tous les quatre à côté, il y a sept possibilités.
Soit un résultat final : $210 - 105 - 42 - 7 - 21 = \boxed{35}$.

Exercice 12.
Parce que c'est le nombre de configurations possibles.

Nb de cases entre deux tours	1	2	3	4	5	6
Nb de config. possibles pour les tours	6	5	4	3	2	1
Nb de cases pour le roi	1	2	3	4	5	6
Nb de possibilités pour les fous	6	6	$4(\frac{1}{3})\quad 6(\frac{2}{3})$	6	$4(\frac{2}{5})\quad 6(\frac{3}{5})$	6
Nb de possibilités pour la dame	3	3	3	3	3	3
Nb de possibilité pour les cavaliers	1	1	1	1	1	1
Total	108	180	192	216	156	108

Soit 960 possibilités.

Exercice 13.

We line up the goodies and count the possible places for the baddies : 7. We need to pick 4 places among the 7. The sorting gives $\binom{7}{4} = 35$ possibilities.

Exercice 14.

Exercice 15.

Il serait faux de penser que l'on peut prendre le nombre de triplets de points, soit $\binom{5}{3} = 10$ plans et les intersections de ces plans, soit $\binom{10}{2} = 45$ droites. En effet, on peut retomber sur la même droite.

Il faut regarder quand un seul point est commun aux deux plans : $5 \times 3 = 15$ droites.

Et quand la droite obtenue est celle passant par deux des cinq points : $\binom{5}{2} = 10$ droites.

Soit au total $\boxed{25}$ droites.

Exercice 17.

1) $\binom{30}{10} = 30\ 145\ 015$ nombre de marche sur un quadrillage, du point $(0, 0)$ au point $(10, 30)$.

Exercice 18.

1) $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

2) On doit calculer la somme $\sum\limits_{p=0}^{n} \text{card}(X) = \sum\limits_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$ d'après un exercice classique fait en cours.

Exercice 19.

18.

Exercice 20.

1) Il s'agit d'un tirage avec ordre et sans remise des six places pour chacun des livres. Soit un arrangement $A_6^6 = 6! = \boxed{720}$.

2) On reprend le calcul précédent mais on doit quotienter par l'ordre sur les trois livres de géographie : $3! = 6$ et celui sur les deux livres d'économie : $2! = 2$. Ce qui donne $\dfrac{720}{6 \times 2} = \boxed{60}$.

3) On imagine alors que les trois livres de géographie ne forment qu'un seul et même livre, soit $4! = \boxed{24}$.

Exercice 21.

1) Avec les trois couleurs, il y en a $3! = 6$; avec deux couleurs, il y en a $\binom{3}{2} \times 2 = 6$ et c'est tout. Soit 12 au total.

2) $3 \times 2^{n-1}$.

Exercice 22.

Le nombre de quarts de finales est $7 \times 5 \times 3 \times = 105$ car le premier joueur peut avoir 7 adversaires différents, le suivant non attribué, 5 et ainsi de suite.

Pour les vainqueurs, il y a $2^4 = 16$ possibilités.

Il faut faire attention aussi à l'ordre des quarts de finales. Il y a 3 ordres possibles (AB-CD, AC-BD, AD-BC).

Rien que pour les quarts, on a donc $105 \times 16 \times 3 = 5\ 040$.

Les demi-finales sont fixées par les quarts. Il reste le choix des gagnants : 4 choix possibles. Et pour le finale, 2 choix possibles.

Donc au total, il y a : $5\ 040 \times 4 \times 2 = \boxed{40\ 320}$.

Exercice 23.

Il y en a $\binom{50}{2} + \binom{50}{2} = \boxed{2450}$.

Exercice 24.

$\binom{4}{3}\binom{7}{2} - \binom{3}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{4}\binom{6}{1} = \boxed{72}$.

Exercice 25.

On utilise le crible de Poincaré (avec des notations implicites) :

$$f + a + m - fa - fm - am + fam \leq 100 \quad \Leftrightarrow \quad fam \leq \boxed{39}.$$

Exercice 26.

1) Il ne sert à rien de dénombrer le nombre de paires. Il faut dénombrer le nombre de mots de 16 lettres, soit 16! et diviser par les ordres : 2^8 pour les paires elles-mêmes et 8! pour les huit paires dans la liste. Au total, cela fait $\dfrac{16!}{8!2^8} = \boxed{2\ 027\ 025}$.

2) On procède de la même façon en croisant deux listes de deux mots de 8 lettres, soit $(8!)^2$ et on divise par l'ordre sur les paires qui vaut 8!. Il reste $8! = \boxed{40\ 320}$. On peut le voir aussi en se disant que l'on fait un tirage ordonné des huit équipes arrivées deuxièmes, chacune se retrouvant face à l'équipe arrivée première, dans l'ordre.

3) On rajoute la deuxième condition, i.e. il va falloir enlever des possibilités aux cas précédents. On utilise la formule du crible : $8! - \binom{8}{1}7! + \binom{8}{2}6! - \binom{8}{3}5! + \binom{8}{4}4! - \binom{8}{5}3! + \binom{8}{6}2! - \binom{8}{7}1 + 1 = \boxed{14\ 733}$.

4) Les exceptions sont trop nombreuses pour une stratégie globale... Un arbre (long) ou un programme (court) donne toutes les possibilités : $\boxed{3694}$.

Exercice 27.

- $S = \sum\limits_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = \sum\limits_{p=0}^{n} pn\binom{n-1}{p-1} = n2^{n-1}$.
- On écrit successivement tous les éléments des parties de E. Chaque élément est écrit le nombre de fois égal au nombre de parties de $E\backslash\{a\}$: 2^{n-1}. Donc on trouve encore $n2^{n-1}$.
- $2S = \sum \text{card } A + \sum \text{card } \bar{A} = \sum \text{card}(A \cup \bar{A} = n2^n$. Donc $S = n2^{n-1}$.

Exercice 29.

Il faut choisir le nombre de sauts : S'il y a k sauts, il faut choisir $k+1$ termes de $[\![1, n]\!]$, soit $\binom{n}{k+1}$, puis choisir les k valeurs d'indices qui correspondent aux sauts : $\binom{n-1}{k}$, d'où $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1}\binom{n-1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2$.

Exercice 30.

1) Par récurrence sur le nombre de secteurs avec n droites, noté a_n. On a $a_{n+1} = a_n + n + 1$ et $a_0 = 1$. En posant $u_{n+1} = a_{n+1} - a_n = n + 1$, on trouve par télescopage $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = a_n - a_0 \quad \Leftrightarrow$

$\boxed{a_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

2) Deux. Par récurrence directe.

Exercice 31.

Il s'agit d'un tirage sans ordre et sans remise parmi les neufs chiffres (le zéro ne peut apparaître). D'autre part, l'ordre est imposé par la décroissance des chiffres dans le nombre. Ainsi, il existe

$$\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\cdots+\binom{9}{9}=2^9-\binom{9}{1}-\binom{9}{0}=\boxed{502}.$$

Exercice 32.

$n\times 3^{n-1}$. On choisit le singleton (n choix possibles), puis pour chaque élément de $E\backslash(X\cap Y)$, on choisit s'il est dans X, Y ou ni l'un ni l'autre.

Exercice 33.

Tirage avec remise et sans ordre (l'ordre est donné par les conditions de décroissance). $\Gamma_{10}^3=\binom{10+3-1}{3}=220$, mais il faut retirer le triple 0, soit $\boxed{219}$ solutions.

Exercice 34.

Nombre de tickets sans numéro bon : $\binom{45}{5}\binom{11}{2}$. Nombre de tickets avec un bon numéro et zéro ou une étoile seulement : $\binom{5}{1}\binom{45}{4}\left[\binom{9}{2}+\binom{2}{1}\binom{9}{1}\right]$.

Le nombre total de combinaisons est $\binom{50}{5}\binom{11}{2}$, soit une probabilité de $\boxed{0,922}$.

Exercice 35.

1) a) Les k éléments sont fixés et appartiennent à la fois à X et à Y. On complète X en rajoutant l éléments venant des $n-k$ restants. Il y a $\binom{n-k}{l}$ façons de le faire. A chaque fois, il reste $n-k-l$ éléments et il y a 2^{n-k-l} façons de compléter Y, autant que de parties d'un ensemble à $n-k-l$ éléments, ce qui donne le nombre cherché :

$$N_k=\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}2^{n-k-l}=3^{n-k}$$

par le binôme de Newton.

On peut aussi supposer que l'on a fixé les k éléments et qu'il reste à placer les $n-k$ autres éléments, soit dans $X\backslash(X\cap Y)$, soit dans $Y\backslash(X\cap Y)$, soit dans $E\backslash(X\cup Y)$. Un arbre donne directement trois choix par éléments, donc 3^{n-k} possibilités.

b) Ainsi, $S=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}3^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}3^{n-k}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}3^{n-k}=n(1-3)^{n-1}\boxed{n4^{n-1}}$.

2) a) Il s'agit bien d'un recouvrement car $X\times Y\cup X\times\overline{Y}\cup\overline{X}\times Y\cup\overline{X}\times\overline{Y}=E\times E$. De plus, il est disjoint car, par exemple, il n'existe pas d'élément (x,y) dans $X\times Y$ et dans $X\times\overline{Y}$. On a donc bien affaire à une partition.

b) Cette application est clairement bijective (avec pour bijection réciproque, elle-même). Ainsi, quand on regarde le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(E)^2$, on trouve $2^n\times 2^n=4^n$. Et l'on peut subdiviser en 4^{n-1} quadruplets donnés par la partition précédente.

Il suffit maintenant de voir que si on fixe $x\in E$, chaque élément (x,x) est toujours dans un seul des quatre éléments de chaque quadruplet. Dans la somme, on compte donc 4^{n-1} fois chaque x de E, soit $n4^{n-1}$ au total.

Exercice 36.

Pour les consonnes, on a $\dfrac{6!}{2!}=360$ possibilités du fait des deux 'T'. Il reste donc 7 places possibles pour les voyelles avec remise et sans ordre (l'ordre étant imposé par l'ordre alphabétique), soit $\Gamma_7^5=462$.

Soit au total, $462\times 360=\boxed{166\ 320}$.

Exercice 37.

• Première méthode : Cela revient à découper le segment $[0,60]$ en trois morceaux. Il faut donc choisir deux entiers entre 1 et 59, soit $\binom{59}{2} = \boxed{1711}$.

• Seconde méthode : On pose $x' = x-1$, $y' = y-1$ et $z' = z-1$. On a $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ et $x'+y'+z' = 57$. On peut le voir comme 57 objets dont on doit choisir de les mettre dans x', y' ou z', ce qui donne $\Gamma_{57}^3 = 1711$.

Exercice 38.

• Première méthode : Avec 15 petits, d'une seule façon ; avec 13 petits et 1 grand, de 14 façons ; avec 11 petits et 2 grands, de $\Gamma_{12}^2 = \binom{13}{2} = 78$ façons et en continuant, de $\Gamma_{10}^3 = 280$, $\Gamma_8^4 = 330$, $\Gamma_6^5 = 252$, $\Gamma_4^6 = 84$ et $\Gamma_2^7 = 8$. Soit au total, $\boxed{987}$.

• Seconde méthode : Par récurrence, soit x_{30} le nombre cherché, on a $x_0 = 1$, $x_2 = 1$ et $x_n = x_{n-2} + x_{n-4}$. On obtient la suite de Fibonacci et $x_{30} = F_{17} = 987$.

Exercice 39.

• Première méthode : En diminuant le nombre de d :

$$3^{12} + 3^{10} \times \Gamma_2^{11} + 3^8 \times \Gamma_4^9 + 3^6 \times \Gamma_6^7 + 3^4 \times \Gamma_8^5 + 3^2 \times \Gamma_{11}^3 + 1 = \boxed{8\ 390\ 656}.$$

• Seconde méthode : On note x_n le nombre de mots de n lettres contenant un nombre pair de fois le d. On a alors $x_n = 3x_{n-1} + 4^n - x_{n-1} = 2x_{n-1} + 2^{2n}$ car on place a, b, c à la fin d'un mot de $n-1$ lettres contenant un nombre pair de fois le d OU un d à la fin d'un mot de $n-1$ lettres ayant un nombre impair de d. On trouve par récurrence $x_n = 2^{n-1} + 2^n + \cdots + 2^{2n-2} = \dfrac{2^{2n} + 2^n}{2} = 2^{2n-1} + 2^{n-1}$ et le même résultat en découle.

Exercice 40.

• Première méthode : Soit x_n ce nombre pour les nombres de 1 à n. On a $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ et $x_{n+1} = nx_n + (n-1)x_{n-1}$ car on rajoute $n+1$sur une des n places possibles OU on intercale $n+1$ entre deux consécutifs (comptés comme un seul chiffre). Ce qui donne $x_8 = \boxed{16\ 687}$.

• Seconde méthode : On note E_i l'ensemble des permutations telles que i et $i+1$ se succèdent, pour $i \in [\![1,7]\!]$. On veut $\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{7} E_i\right)$. On utilise le crible et le fait que $\operatorname{card}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = (8-k)!$. On a alors

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{7} E_i\right) = \binom{7}{1}7! - \binom{7}{2}6! + \binom{7}{3}5! - \binom{7}{4}4! + \binom{7}{5}3! - \binom{7}{6}2! + \binom{7}{7}1! = 23\ 633$$

Donc il y a $8! - 23\ 633 = \boxed{16\ 687}$ solutions.

Exercice 41.

1) 1,2,5.

2) $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} t_k t_{n-k}$.

Exercice 42.

1) a) $\binom{n}{2}$.

b) $\binom{n}{3}$.

c) Attention, pour quatre points, il y a $\binom{n}{4}$ quadrilatères non croisés. Mais il faut rajouter les deux croisés pour chaque quadruplet. Soit au total $3\binom{n}{4}$.

d) De la même façon, $\binom{n}{p}$ polygônes non croisés. Il reste à compter les croisés. Sinon, on compte le nombre de choix de points $\binom{n}{p}$ et pour p points, on fixe un sommet et ses deux liaisons : $\binom{p-1}{2}$ puis à un des deux points choisi, on associe un autre point : $p-3$ choix, puis $p-4$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de choix. Soit au total : $\binom{n}{p}\binom{p-1}{2}(p-3)!$.

2) a) $\binom{n}{2}$.
b) $\binom{n}{2}$.

Exercice 43.
Le message d'abord : "Il est vraiment trop dur cet exercice. Merde !"
Et il y a bien $4^9 = 262\ 144$ grilles possibles.

Exercice 44.
1) $(2n)!$.
2) $2(n!)^2$.
3) $2^{n+1} \times n!$.
4) $4 \times n!$.

Exercice 45.
1) $\{x_1 - 1, \ldots, x_p - p\}$ est une partie quelconque de $\{0, \ldots, n-p\}$, donc $N = C^p_{n-p+1}$.
2) b) 32951280099.

Exercice 46.
1) $\Gamma^1_n = n$. $\Gamma^2_1 = 1$ et $\Gamma^2_n = \binom{n+1}{2}$. $\Gamma^3_1 = 1$, $\Gamma^3_2 = 4$ et $\Gamma^3_n = \binom{n+2}{3}$.
2) Si l'on écrit toutes les combinaisons à répétition de p éléments de E, on obtient $p\Gamma^p_n$ éléments. Et comme les n éléments de E apparaissent un même nombre de fois, on a écrit $\dfrac{p}{n}\Gamma^p_n$ fois le x.
3) Il existe Γ^{p-1}_n combinaisons contenant x. Et dans ces combinaisons, x apparaît $\Gamma^{p-1}_n + \dfrac{p-1}{n}\Gamma^{p-1}_n$ fois.
Donc $\dfrac{p}{n}\Gamma^p_n = \Gamma^{p-1}_n + \dfrac{p-1}{n}\Gamma^{p-1}_n = \dfrac{n+p-1}{p}\Gamma^{p-1}_n$.
Ainsi $\Gamma^p_n = \dfrac{n+p-1}{p} \times \dfrac{n+p-2}{p-1} \times \cdots \times \dfrac{n+1}{2}\Gamma^1_n = \binom{n+p-1}{p}$.
4) On associe à chaque x_i de E le nombre de fois m_i où il est écrit dans une combinaison à répétition de p éléments de E. On a alors $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = p$ où $m_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On a donc une bijection de l'ensemble des combinaisons à répétition de p éléments de E dans l'ensemble des suites de n entiers naturels dont la somme vaut p.

Exercice 47.
On cherche une p liste telle que $1 \leq x_1 < x_2 - k < x_3 - 2k < \cdots < x_p - (p-1)k \leq n - (p-1)k$. Il y a une bijection entre l'ensemble des p-listes (x_i) et des p-listes (y_i) telles que $1 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_p \leq n - (p-1)k$. Soit $\binom{n-(p-1)k}{p}$ possibilités.

Exercice 48.
On imagine une partie $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ répondant aux contraintes.
On peut créer la bijection qui à chaque liste de ce type associe la liste des p nombres de $[\![1, n+1-p]\!]$: $a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < \cdots < a_p - (p-1)$. Donc $p \leq n+1-p$, i.e. $p \leq \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.
On trouve donc $\binom{n+1-p}{p}$ possibilités.

Exercice 52.
1) $(n-1)!$
2) a) En numérotant $m_0, m_1, \ldots, m_n$ les numéros des maisons visitées (avec $m_0 = m_n = 1$). Il existe i tel que $m_i = n$. Et

$$l = \underbrace{|m_1 - m_0| + \cdots + |m_i - m_{i-1}|}_{\geq |m_i - m_0| = n-1} + \underbrace{|m_{i+1} - m_i| + \cdots + |m_n - m_{n-1}|}_{\geq |m_n - m_i| = n-1} \geq 2(n-1)$$

en utilisant l'inégalité triangulaire.

b) On remarque que $1, n, n-1, \ldots, 1$ est de longueur minimale $2(n-1)$. On montre facilement que la minimalité est conservée si et seulement si il n'y a qu'une série croissante jusqu'à n et une décroissante jusqu'à 1, soit 2^{n-2} trajets.

3) a) • Si $n = 5$: La distance 4 (entre 1 et 5) ne peut être atteinte qu'une fois. La distance 3 est réalisée entre 1 et 4 ou entre 2 et 5 mais ne peut être réalisée plus d'une fois si la distance 4 est atteinte. De même, la distance 2 ne peut être réalisée plus de deux fois si 3 et 4 sont atteintes. Il ne reste que des distances 1. Soit

$$l = 4 + 3 + 2 \times 2 + 1 = 12.$$

• Si $n = 6$: Idem et on trouve $l = 5 + 4 + 3 \times 2 + 2 + 1 = 18$.

b) On note $m_0, \ldots, m_n$ un trajet. On définit une suite d'indices entre lesquels m croît ou décroît. On pose $b_1 = 0$ et considérerh_1 le plus grand indice $k \geq b_1$ tel que $m_k > m_{k-1}$. On définit ensuite b_2 comme le plu sgrand indice $k \geq h_1$ tel que $m_k < m_{k-1}$. On construit ainsi de suite deux séquences $b_1 = 0, \ldots, b_k, b_{k+1} = n$ et $h_n, \ldots, h_k$ telles que (m_i) est croissante entre b_i et h_i puis décroissante entre h_i et b_{i+1}.

La longueur du trajet est alors

$$\begin{aligned} l &= m_{h_1} - m_{b_1} + m_{h_1} - m_{b_2} + \cdots + m_{h_k} - m_{b_k} + m_{h_k} - m_{b_{k+1}} \\ &= 2(m_{h_1} + \cdots + m_{h_k}) - 2(m_{b_1} + \cdots + m_{b_k}) \\ &= 2(m_{h_1} - m_{b_1} + m_{h_2} - m_{b_2} + \cdots + m_{h_k} - m_{b_k}) \\ &\leq 2((n-1) + (n-3) + \cdots + (n-2k+1)) \leq 2k(n-k). \end{aligned}$$

La fonction $k \longmapsto k(n-k)$ atteint son maximum en $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Donc

$$l \leq 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \left(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor.$$

4) L'espérance E est donnée par

$$\begin{aligned} (n-1)!E &= \sum l(m) = \sum \sum_{k=1}^{n} |m_k - m_{k-1}| \\ &= \sum |m_1 - 1| + \sum_{k=2}^{n-1} \sum |m_k - m_{k-1}| + \sum |m_{n-1} - 1| \end{aligned}$$

On a $\sum |m_1 - 1| = (n-2)! \sum\limits_{i=2}^{n} (i-1) = \frac{n!}{2}$. Idem pour $\sum |m_{n-1} - 1|$.

Et

$$\begin{aligned} \sum |m_k - m_{k-1}| &= \sum_{2 \leq x \neq y \leq n} |x - y| = 2 \sum_{2 \leq x \leq y \leq n} (y - x) \\ &= 2 \sum_{1 \leq t \leq y \leq n} (y - t - 1) = 2 \sum_{1 \leq t \leq y \leq n} 1 \\ &= 2\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}. \end{aligned}$$

Tout calcul fait, on trouve $\boxed{E = \dfrac{n(n+1)}{3}}$.

Exercice 53.

1) - Il faut au moins deux personnes. Auquel cas, il y a $n_2 = 12$. On obtient ce nombre soit directement avec un arbre ou un tableau, soit en utilisant le crible de Poincaré : $n_2 =$.
2) $3 \times 3 \times 1 + 3 \times 3 \times 3 + 3! = 24$.

Exercice 54.

1) Il suffit de choisir les deux éléments qui ont la même image, soit $\binom{n+1}{2}$, ainsi que leur image commune, soit n possibilités. Ensuite, il faut déterminer les images des $n-1$ restant de l'ensemble de départ qui établissent une bijection sur les $n-1$ éléments restants de l'ensemble d'arrivée, soit $(n-1)!$ possibilités. Ce qui fait au total :

$$n\binom{n+1}{2} \times (n-1)! = n!\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = n!\frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)!}{2}}.$$

2) Soit E un ensemble à n éléments et soit $a \in E$ un élément fixé. Il y a P_n^k partitions de E en k classes. Parmi ces partitions,
- il y a celles dans lesquelles a est dans un singleton, on les identifie trivialement aux partitions en $k-1$ classes de $E \backslash \{a\}$, et il y en a P_{n-1}^{k-1},
- et celles dans lesquelles a n'est pas isolé. On les dénombre en partitionnant $E \backslash \{a\}$ en k classes puis en adjoignant a à l'une de ces k classes, soit kP_{n-1}^k possibilités.
Au total, cela donne bien la relation voulue : $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$
3) On suppose ici que $n \geq p$. Si l'on veut créer une surjection d'un ensemble à n élément sur un ensemble à p éléments, il faut d'abord déterminer le nombre de partitions en p classes de l'ensemble de départ qui possède n éléments, soit P_n^p. Ensuite, il faut choisir la façon d'envoyer les p classes sur les p éléments de l'ensemble d'arrivée, soit $p!$ possibilités. Au total, il y a $\boxed{p!P_n^p}$ surjections.

4) Par récurrence sur n : $\mathcal{H}_n : \ \forall k \geq n, \ N_{k,p} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \frac{p!}{i!(p-i)!}(p-i)^k$.