

Exercice 1. 🎵

Sur un dé à 100 faces, quelle est la probabilité d'obtenir le chiffre 1 ou le chiffre 4 ?

Exercice 2. 🎵

Sur l'univers $\llbracket 1, 100 \rrbracket$, on considère les événements A : "le nombre obtenu est un multiple de 2" et B : "le nombre obtenu est un multiple de 5".

- 1) Ces événements sont-ils indépendants ?
- 2) Même question si on se place sur $\llbracket 1, 101 \rrbracket$.
- 3) Quel doit être le nombre de faces du dé pour que les événements soient indépendants ?

Exercice 3. 🎵

On considère deux urnes. La première contient quatre boules noires et deux blanches ; la seconde deux noires et quatre blanches. On choisit une urne au hasard, on tire successivement trois boules sans remise. Donner la probabilité de tirer une troisième boule noire sachant que l'on a déjà tiré deux boules noires avant.

Exercice 4. 🎵

Alice et Bob lancent le même dé à tour de rôle et c'est Alice qui commence. Le gagnant est le premier à obtenir un "6". La partie s'arrête alors.

- 1) Déterminer la probabilité de l'événement L : "pas de vainqueur". Comment qualifier l'événement L ?
- 2) On note F la variable aléatoire correspondant au nombre de coups joués jusqu'à la victoire d'un des deux joueurs.
 - a) Exprimer les événements A (resp. B) victoire d'Alice (resp. de Bob) en fonction des F .
 - b) Déterminer la loi de F et préciser $p(F = n)$, $E(F)$ et $V(F)$.
 - c) Calculer la probabilité de victoire de chacun des deux joueurs.

Exercice 5.

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

- 1) Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
- 2) Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
- 3) Soit X la variable aléatoire "nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard". Quelle est la loi de probabilité de X , son espérance, sa variance et son écart type ?
- 4) Calculer $p(X = 5)$.

Exercice 6.

Dans un laboratoire se trouve une cage avec vingt souris présentant deux caractères : sexe (mâle ou femelle) et couleur (blanche ou noire).

Il y a douze mâles, dont sept blancs et onze souris blanches en tout. On décide de prélever trois souris au hasard.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir trois souris blanches si le prélèvement est effectué avec remise.

- 2) Calculer la probabilité d'obtenir trois souris blanches si le prélèvement est effectué sans remise.
- 3) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une souris blanche si le prélèvement est effectué avec remise.
- 4) Calculer la probabilité d'obtenir trois souris blanches ou mâles si le prélèvement est effectué sans remise.

Exercice 7.

Pour organiser une coupe, on organise un tirage au sort qui réunit six équipes de basket-ball de 1^{ère} division et six équipes de 2^{ème} division, de sorte que, au premier tour, chaque équipe joue un match et un seul.

- 1) Combien peut-on obtenir de matchs différents ?
- 2) Combien peut-on obtenir de tirages au sort différents sachant que les matchs se joueront simultanément ?
- 3) Calculer la probabilité que tous les matchs opposent une équipe de 1^{ère} division à une équipe de 2^{ème} division.
- 4) Calculer la probabilité que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.

Exercice 8.

Trois coffres notés C_1 , C_2 et C_3 ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce. Le coffre C_1 contient deux pièces d'or, C_2 deux pièces d'argent et C_3 une pièce d'or et une d'argent.

- 1) On ouvre au hasard l'un des six tiroirs et on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C_2 ?
- 2) On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ?

Exercice 9.

Deux étudiants se préparent à un examen. Trois professeurs, (Cosinus, Tournesol et Maboul) notés C , T et M sont susceptibles de donner le sujet. les anciens élèves ont évalué à :

- $p(C) = 0,4$ la probabilité pour que ce soit le docteur A qui pose l'examen,
- $p(T) = 0,25$ la probabilité pour que ce soit le docteur B qui pose l'examen,
- $p(M) = 0,35$ la probabilité pour que ce soit le docteur C qui pose l'examen,

Par ailleurs, les étudiants redoutent tout particulièrement que le sujet porte sur le chapitre d'arithmétique que nous noterons A . Fins psychologues, ils estiment que la probabilité pour que le chapitre A sorte est :

- de 0,1 si c'est Cosinus qui pose le sujet,
- de 0,82 si c'est Tournesol qui pose le sujet,
- de 0,4 si c'est Maboul pose le sujet.

Le jour de l'examen arrive, et les étudiants découvrent que le sujet porte sur l'arithmétique. Calculer les probabilités que le sujet ait été posé par Cosinus, par Tournesol, par Maboul.

Exercice 10.

Un professeur se trouve en possession de cinq clés de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses cinq clés, deux n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clés est effectué au hasard et sans remise.

On appelle clé numéro k la clé utilisée au k^{e} essai.

On appelle D_i l'évènement : "la clé numéro i n'ouvre pas la porte".

- 1) Calculer $p(D_1)$.
- 2) Calculer $p(D_2)$ et $p_{D_1}(D_2)$.
- 3) En déduire $p(D_1 \cap D_2)$.
- 4) Quelle est la probabilité que les clés 1 et 2 ouvrent la porte, mais pas la 3.
- 5) On note $E_{i,j}$ l'évènement : "les clés qui n'ouvrent pas la porte sont les clés i et j ".
 - a) Calculer $p(E_{2,4})$.

b) Calculer $p(E_{4,5})$.

Exercice 11.

Deux archers A_1 et A_2 disputent un match. Les archers A_1 et A_2 tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche; A_1 tire en premier.

Pour tout $i \in \{1, 2\}$, l'archer A_i touche la cible avec la probabilité $p_i \in]0, 1[$, et on note $q_i = 1 - p_i$. Les tirs sont indépendants. On remarquera que A_1 tire les rangs impairs.

On note G_i l'évènement : " A_i l'emporte".

- 1) Calculer la probabilité que A_1 l'emporte au rang $2n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$?
- 2) Calculer la probabilité que A_2 l'emporte au rang $2n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$?
- 3) En déduire $p(G_1)$ et $p(G_2)$ puis la probabilité que le jeu dure indéfiniment.
- 4) Déterminer une relation entre p_1 et p_2 pour que le jeu soit équitable.
- 5) Que peut-on dire si $p_1 > \frac{1}{2}$?

Exercice 12.

On étudie la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes :

- (H_1) Le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures.
- (H_2) Le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente.
- (H_3) Le rat se souvient des deux dernières expériences.

Avec quelle probabilité la première tentative réussit-elle la première? la deuxième? la troisième? la $k^{\text{ième}}$?

Exercice 13.

On considère trois lots d'articles de même type, le premier compte n_1 articles défectueux et m_1 bons articles; le deuxième, n_2 articles défectueux et m_2 bons articles et le troisième, n_3 défectueux et m_3 défectueux.

On choisit au hasard l'un des lots pour en tirer au hasard deux articles, le premier est défectueux. Quelle est la probabilité que le second article soit défectueux lui aussi?

Exercice 14.

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50€.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est 0,2, s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est 0,05.

Pour tout entier naturel non nul n , on appelle R_n l'évènement : "l'employé est en retard le jour n ".

On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

- 1) Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
- 2) Déterminer $p(R_n \cap R_{n+1})$ en fonction de p_n et $p(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$ en fonction de q_n .
- 3) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n .
- 4) En déduire p_{n+1} en fonction de p_n .
- 5) Exprimer p_n en fonction de n et trouver sa limite.

Exercice 15. (ENS Cachan D2 - 1988)

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules blanches en proportions respectives p_1 et p_2 et des boules rouges en proportions respectives q_1 et q_2 avec $p_1 + q_1 = 1$ et $p_2 + q_2 = 1$.

Pour le premier tirage, on tire au sort, avec équiprobabilité, l'urne où on effectue ce tirage. Pour le n^{e} tirage, on l'effectue dans l'urne 1 si le résultat du $(n - 1)^{\text{e}}$ a été une boule blanche, dans l'urne 2 si ce résultat a été rouge. A chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne d'où on l'a tirée.

- 1) Calculer la probabilité b_1 de tirer une boule blanche au premier tirage, b_2 au deuxième et b_3 au troisième.

- 2) Sachant que la dernière boule tirée est blanche, quelle est la probabilité de l'avoir tirée de l'urne 1 au premier tirage? Au deuxième? Au troisième?
- 3) Calculer b_k , probabilité de tirer une boule blanche au k^{e} tirage, en fonction de b_{k-1} et r_{k-1} , probabilité, au $(k-1)^{\text{e}}$ tirage de tirer respectivement une boule blanche et une rouge. Calculer de même r_k .
- 4) Calculer, si elle existe, la limite de b_k quand le nombre de tirages augmente indéfiniment.

Exercice 16. (ENS Cachan D2 - 1985)

Dans un atelier, se trouvent deux machines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui doivent fonctionner simultanément pour fabriquer une pièce. Chaque machine a une même probabilité p de se dérégler en fabriquant cette pièce qui est alors défectueuse. Les dérèglements des machines sont indépendants en probabilité.

- 1) Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
- 2) Calculer les probabilités qu'il y ait 0, 1 ou 2 machines déréglées.
- 3) On sait que la pièce fabriquée est défectueuse. Quelle est la probabilité pour que ce soit dû à une et une seule machine? Aux deux machines?
- 4) Soit M l'évènement "la pièce fabriquée est défectueuse", soit A (resp. B) l'évènement "la machine $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) est déréglée". Calculer $p_M(A)$ et $p_M(B)$.
- 5) Un testeur permet de déterminer avant fabrication d'une pièce si une machine est déréglée ou non. Malheureusement, ce testeur se trompe avec une probabilité 0,1 quand la machine est bien réglée et il se trompe encore avec une probabilité égale à 0,1 quand la machine est déréglée.

Quelle est alors la probabilité qu'une machine soit réellement déréglée alors que le testeur l'indique?



Solutions des exercices

Exercice 1.

{1, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 24, 31, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 54, 61, 64, 71, 74, 81, 84, 91, 94}
soit une probabilité de $\frac{36}{100} = \frac{9}{25}$.

Exercice 2.

- 1) Oui. $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{5}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{10}$.
- 2) Non. $P(A) = \frac{50}{101}$, $p(B) = \frac{20}{101}$ et $p(A \cap B) = \frac{10}{101}$.
- 3) Multiple de 10.

Exercice 3.

On note les évènements :

- U_i : "Tirer dans l'urne i ".
- N_k : "Tirer une noire au $k^{\text{ième}}$ tirage".

On cherche $p_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{p(N_1 \cap N_2 \cap N_3)}{p(N_1 \cap N_2)}$.

On calcule par la formule des probabilités totales dans le système complet d'évènements (U_1, U_2) :

$$p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = p(U_1) \times p_{U_1}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(U_2) \times \underbrace{p_{U_2}(N_1 \cap N_2 \cap N_3)}_{=0} = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{10}$$

$$p(N_1 \cap N_2) = p(U_1) \times p_{U_1}(N_1 \cap N_2) + p(U_2) \times p_{U_2}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{7}{30}.$$

$$\text{Donc } p_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \boxed{\frac{3}{7}}.$$

Exercice 4.

- 1) On note L_n l'évènement : "pas de victoire au cours des n premiers tirages". On a donc $p(L_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ puisque les seuls chiffres obtenus sont différents de "6". Et dans notre cas, $p(L) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(L_n) = 0$. L'évènement est donc dit impossible.

- 2) a) On a $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (F = 2k + 1)$ et $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (F = 2k + 2)$.

b) La variable aléatoire F est la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès. De plus, $F(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc F suit $\mathcal{G}_{N^*}(\frac{1}{6})$, une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $\frac{1}{6}$.

$$\text{Ainsi, } p(F = n) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}, E(F) = \frac{1}{p} = 6 \text{ et } V(F) = \frac{q}{p^2} = 30.$$

$$\text{c) On a } p(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p(F = 2k + 1) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{25}{36}\right)^k.$$

On utilise la somme des termes d'une suite géométrique $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et comme $|q| < 1$,

$$\text{alors } \frac{1}{6} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{25}{36}\right)^k = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{25}{36}\right)^{n+1}}{1 - \frac{25}{36}} = \boxed{\frac{6}{11}}.$$

$$\text{Donc } p(B) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \boxed{\frac{5}{11}}.$$

Exercice 5.

- 1) On trouve avec les probabilités totales $p = 0,505$.
- 2) On trouve $p = 0,55446$.
- 3) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$. L'espérance est donc $E(X) = 4$.
- 4) $p(X = 5) \simeq 0,103$.

Exercice 11.

$$4) p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$$

Exercice 14.

$$4) p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n.$$

Exercice 15.

- 1) On note U_i^k : "Tirer dans l'urne U_i au k^e tirage" et B_k : "Tirer une boule blanche au k^e tirage". D'après les probabilités totales sur le système complet d'événements $\{U_1^1, U_2^1\}$, on trouve

$$b_1 = p(U_1^1) \times p_{U_1^1}(B_1) + p(U_2^1) \times p_{U_2^1}(B_1) = \boxed{\frac{p_1 + p_2}{2}}.$$

On fait de même pour $b_2 = b_1 p_1 + (1 - b_1) p_2$ et $b_3 = b_2 p_1 + (1 - b_2) p_2$.

$$2) \text{ On cherche } p_{B_1}(U_1^1) = \frac{p_{U_1^1}(B_1) \times p(U_1^1)}{p(B_1)} = \frac{p_1 \times \frac{1}{2}}{b_1} = \boxed{\frac{p_1}{2b_1}}.$$

$$\text{De même, } p_{B_2}(U_1^2) = \frac{p_{U_1^2}(B_2) \times p(U_1^2)}{p(B_2)} = \boxed{\frac{p_1 \times b_1}{b_2}}.$$

$$\text{Et } p_{B_3}(U_1^3) = \frac{p_{U_1^3}(B_3) \times p(U_1^3)}{p(B_3)} = \boxed{\frac{p_1 \times b_2}{b_3}}.$$

- 3) On a $b_k = p(B_k) = p(B_k \cap U_1^k) + p(B_k \cap U_2^k) = p_1 b_{k-1} + p_2 r_{k-1}$.

De même, $r_k = 1 - b_k = 1 - p_1 b_{k-1} - p_2 r_{k-1}$.

- 4) On a $b_k = p_1 b_{k-1} + p_2 r_{k-1} = p_1 b_{k-1} + p_2(1 - b_{k-1})$. Si on suppose que $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \ell$, on a aussi $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{k-1} = \ell$ et donc en passant à la limite dans l'expression précédente,

$$\ell = p_1 \ell + p_2(1 - \ell) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ell = \frac{p_2}{1 - p_1 + p_2}}$$

Exercice 16.

- 1) Soit M l'événement "la pièce est défectueuse", soit A (resp. B) l'événement "la machine $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) est déréglée". On veut calculer $p(M) = p(A \cup B)$. On a donc $p(M) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \boxed{2p - p^2}$.

- 2) Si X est le nombre de machines déréglées, on a X qui suit une loi binomiale de paramètres 2 et p . Ainsi, les probabilités cherchées sont $p(X = 0) = (1 - p)^2$, $p(X = 1) = 2p(1 - p)$ et $p(X = 2) = p^2$.

- 3) On cherche la probabilité $p_M(X = 1) = \frac{p(M \cap (X = 1))}{p(M)} = \frac{p(X = 1)}{p(M)} = \frac{2p(1 - p)}{p(2 - p)} = \boxed{\frac{2(1 - p)}{2 - p}}$.

$$\text{De même, } p_M(X = 2) = \frac{p^2}{p(2 - p)} = \boxed{\frac{p}{2 - p}}.$$

- 4) On a $p_M(A) = \frac{p(M \cap A)}{p(M)} = \frac{p(A)}{p(M)} = \frac{p}{p(2 - p)} = \frac{1}{2 - p} = p_M(B)$ par symétrie.

- 5) On note les événements T : "Le test est positif" et D : "la machine est déréglée". Les probabilités données par l'énoncé sont alors $p_{\overline{D}}(T) = 0,1$ et $p_D(\overline{T}) = 0,1$. Et on cherche $p_T(D) = \frac{p_D(T)p(D)}{p(T)}$

d'après la formule de Bayes. Les probabilités totales donnent $p(T) = p(T \cap D) + p(T \cap \overline{D}) = p(D) \times p_D(T) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(T) = p(1 - 0,1) + (1 - p) \times 0,1 = 0,8p + 0,1$.

Soit $p_T(D) = \frac{0,9p}{0,8p + 0,1}$.

