Généralités sur les fonctions.

I Rappels de base.
II Fonctions de référence.
III Opérations élémentaires.
IV Composition de fonctions.
V D'une courbe à l'autre.

I Rappels de base.

Définition : L'**ensemble de définition** d'une fonction *f*, noté *Df*, est l'ensemble des *x* réels pour lesquels *f*(*x*) a un sens. On pourra donc noter dorénavant $f : D_f \to \mathbb{R}$

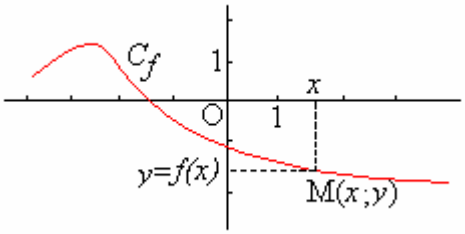
Pour l'instant, à notre niveau, seuls deux calculs sont interdits :

- La division par 0.
- La racine carrée d'un nombre négatif.

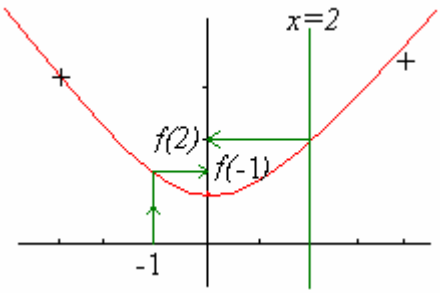
Exemples : Soient $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $g(x)=\sqrt{6-x}$ et $h(x)=\sqrt{|x-2|}$. On a $Df=3\backslash\{-1\ ;1\}$, $Dg=]-\infty\ ;6[$ et $Dh=3$.

→ Trouver l'ensemble de définition de $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ [$Df=[-2\ ;2]\backslash\{1\}$]

Définition : Soit *f* une fonction, la **représentation graphique** (ou courbe représentative) de *f*, notée C_f , est l'ensemble des points de coordonnées (*x* ;*f*(*x*)), où *x* est un réel de *Df*.

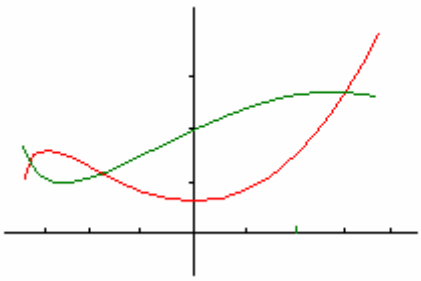


→ On considère $f(x)=x^2+1$. Calculer l'ordonnée du point d'abscisse –1. Déterminer le point appartenant à la courbe et à la droite d'équation *x*=2. Les points (4 ;16) et (-4 ;17) sont-ils sur la courbe ?



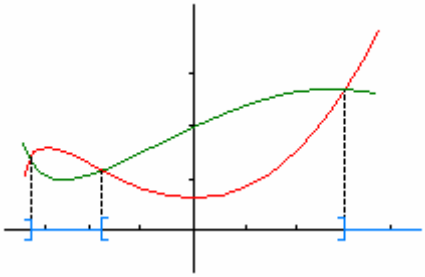
→ On pose $f(x)=x^2+1$. Calculer l'abscisse du point d'ordonnée 5 Résoudre *f*(*x*)=2 puis *f*(*x*)>3.

Intersection de deux courbes : On veut trouver les points d'intersection de deux courbes *Cf* et *Cg*. Il suffit de résoudre l'équation $\boxed{f(x)=g(x).}$



→ Trouver les points communs aux deux courbes représentatives des fonctions $f(x)=x+3$ et $g(x)=x^2-9$.

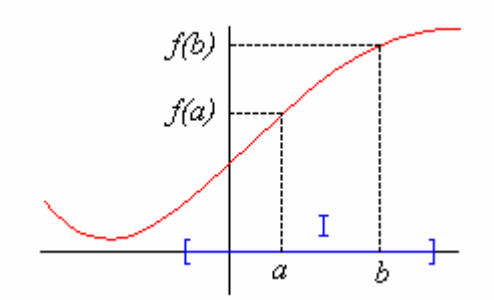
Position relative de deux courbes : On veut pouvoir déterminer avec précision quand une courbe est au-dessus d'une autre. Pour une abscisse donnée x_0 on note $M_f(x_0 ;f(x_0))$ le point de *Cf* et $M_g(x_0 ;g(x_0))$ le point de *Cg* ayant la même abscisse. Alors M_f est au-dessus de M_g si et seulement si $f(x_0)>g(x_0)$.



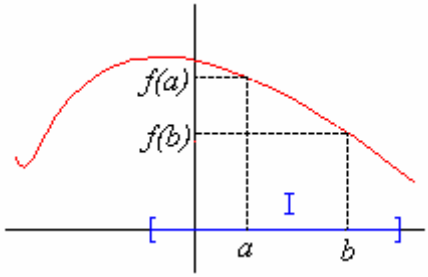
→ Avec les fonctions précédentes, déterminer l'ensemble des points pour lesquels la courbe *Cf* est au-dessus de *Cg*.

Définition : Soit *f* une fonction et I un intervalle contenu dans l'ensemble de définition *Df*.

Dire que ***f* est strictement croissante sur I**, signifie que quels que soient *a* et *b* pris dans I, $\boxed{\text{Si } a<b \text{ alors } f(a)<f(b)}$



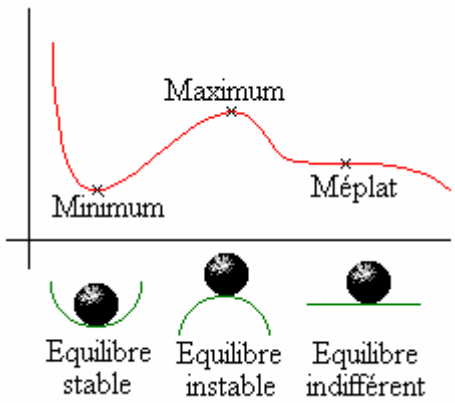
Dire que ***f* est strictement décroissante sur I**, signifie que quels que soient *a* et *b* pris dans I, $\boxed{\text{Si } a<b \text{ alors } f(a)>f(b)}$



Dans le cas où $f(a)<f(b)$ (resp. $f(a)>f(b)$) est remplacé par $f(a)\leqslant f(b)$ (resp. $f(a)\geqslant f(b)$), on dit juste que *f* est **croissante** (resp. **décroissante**) sur I.
Lorsque la courbe est à la fois croissante et décroissante, on dit qu'elle est **constante**.
Une fonction qui est croissante (ou décroissante) sur tout son ensemble de définition est dite **monotone**.

Définition : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que *m* est le **minimum** de *f* sur I signifie qu'il existe *a* dans I tel que $f(a)=m$ et $f(x)\geqslant m$ pour tout *x* de I.
Dire que *M* est le **maximum** de *f* sur I signifie qu'il existe *a* dans I tel que $f(a)=M$ et $f(x)\leqslant M$ pour tout *x* de I.

Remarque : Le minimum (comme le maximum), s'il est unique sur un intervalle, peut être atteint en plusieurs points

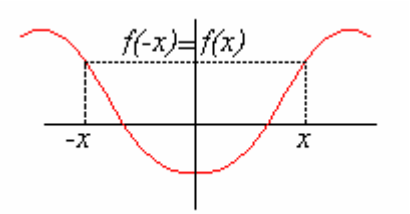


La parité, au même titre que la périodicité permet bien souvent de limiter le domaine d'étude. C'est pourquoi il est très utile de savoir la déterminer au mieux.

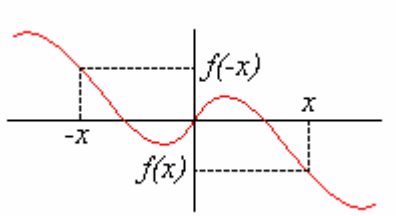
Définition : Soit *f* une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si pour tout *x* de 3 on a $\boxed{f(-x)=f(x)}$, on dit que *f* est **paire.**

Si pour tout *a* de 3 on a $\boxed{f(-x)=-f(x)}$, on dit que *f* est **impaire.**



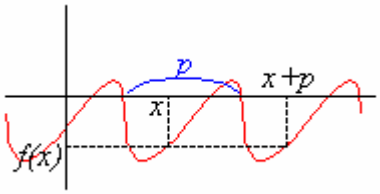
Il en résulte que la représentation graphique de ***f*** **admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées**.



Il en résulte que la représentation graphique de ***f*** **admet pour centre de symétrie le centre du repère**.

Rappel de la rédaction avec un **contre-exemple.**

Définition : Soient f une fonction de 3 dans 3 et p un réel. On dit que f est périodique de période p si pour tout x de 3, on a $\boxed{f(x+p)=f(x)}$.



La courbe représentative f s'obtient par **translation de vecteur (*p*,0)**.

Lorsqu'une fonction est périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur la période et d'utiliser la translation pour étendre l'étude.
Exemple: les battements du cœur, $f(x)=\cos(x)$. On a $\cos(x+360°)=\cos(x)$. La période de f est donc 360.
→ Tracer la courbe de tangente (attention à la période).
→ Trouver les périodes de $\sin(x)$ et de $\cos(2x+1)$.

II Fonctions de référence.

Ne faire que les graphes… hormis pour les fonctions trigonométriques.

-1) $f(x)=ax+b$.

Définition : Soient a et b deux réels fixés, la fonction

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto ax+b$$

est appelée **fonction affine**. Le réel a est le **coefficient directeur** et b est **l'ordonnée à l'origine** de f. Quand a=0 on dit que f est **constante**. Quand b=0, on dit que f est **linéaire**.
→ Trouvez les fonctions affines paires, les impaires.

-2) $f(x)= ax^2$.

Etude

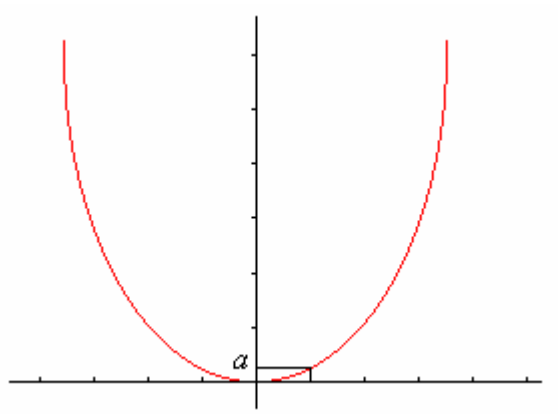
1. $D_f=\mathbb{R}$.
2. Pas de périodicité, par contre, f est paire.
   En effet, $f(-x)=a(-x)^2=ax^2=f(x)$.
3. Si $a>0$ alors f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

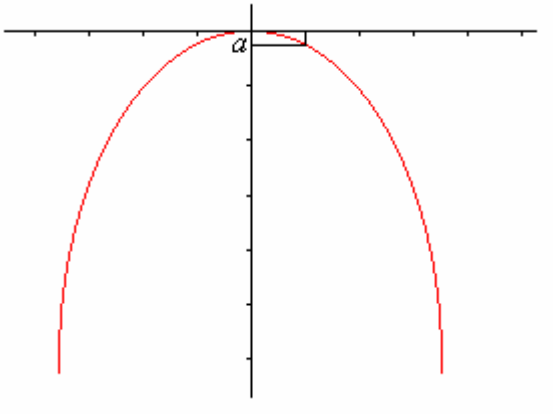
Si $a<0$ alors f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

4. Si $a>0$



Si $a<0$

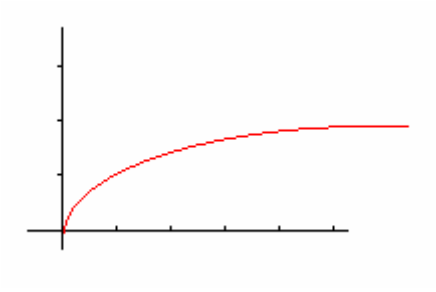


<u>*Définition*</u> : La courbe représentative d'une fonction de la forme ax^2+bx+c avec a, b et c trois réels fixés (a non-nul), s'appelle une **parabole**.

-3) $f(x)=\sqrt{x}$.

Etude

1. $D_f=[0;+\infty[$
2. Pas de périodicité, ni de parité car le domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à l'origine.



-4) $f(x)=\dfrac{a}{x}$.

Ici, $f(x)=\dfrac{a}{x}$ avec $a\neq 0$.

Etude

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Pas de périodicité, par contre, f est <u>impaire</u>.

En effet, $f(-x) = -\dfrac{a}{x} = -f(x)$.

3. Si $a>0$

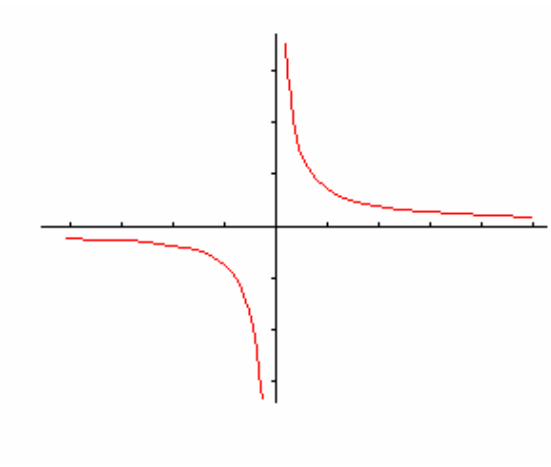
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

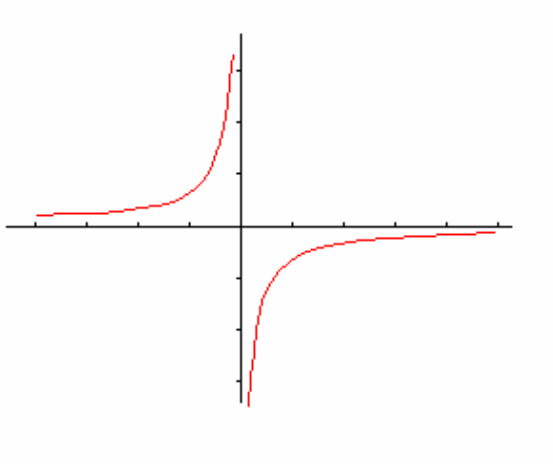
Si $a<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

4. Courbe représentative : Si $a>0$
Il s'agit d'un **hyperbole**.

Si $a<0$





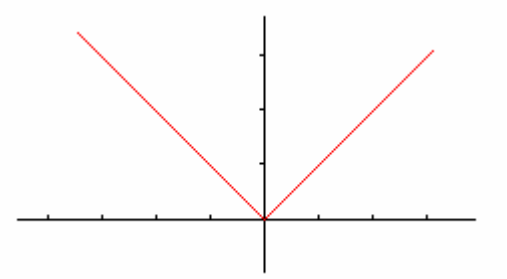
-5) $f(x)= |x|$.

Etude

1. $D_f = \mathbb{R}$.
2. Pas de périodicité, par contre, f est <u>paire</u>.

En effet, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

3. Représentation graphique :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

-6) $f(x)= \cos(x)$

Etude

1. $D_f = \mathbb{R}$.
2. Périodicité : 2π (en effet, d'après ce qui précède, $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$

De plus, f est <u>paire</u>.

On étudie donc la fonction sur $[0 , \pi]$. (On étendra l'étude sur $[-\pi , \pi]$ par parité et sur $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité.

3. Sens de variation sur $[0, \pi]$: On voit aisément sur le cercle trigonométrique que si $0 \leqslant u < v \leqslant \pi$, alors $\cos(u) > \cos(v)$. Donc f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

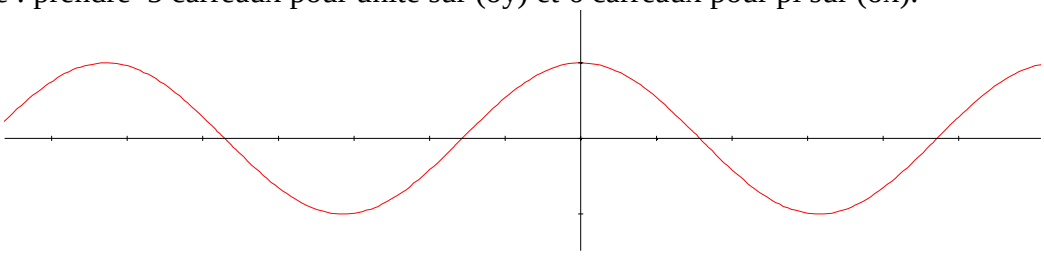
x	$-\pi$		0		π
$f(x)$	-1	↗	1	↘	-1

La fonction f admet 1 pour maximum, atteint en $x=0+2k\pi$ (k entier). De même, la fonction f admet –1 pour minimum atteint en $x=\pi+2k\pi$ (k entier)

4. La courbe :

Tableau de valeurs

échelle : prendre 5 carreaux pour unité sur (oy) et 6 carreaux pour pi sur (ox).



-7) $f(x)= \sin(x)$.

Etude

1. $D_f = \mathbb{R}$.
2. Périodicité : 2π (d'après 5.B, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$

De plus, f est <u>impaire</u> d'après 5.B.

On étudie donc la fonction sur $[0 , \pi]$. (On étendra l'étude sur $[-\pi , \pi]$ par imparité et sur $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité.

3. Sens de variation sur $[0, \pi]$: On voit aisément sur le cercle trigonométrique que

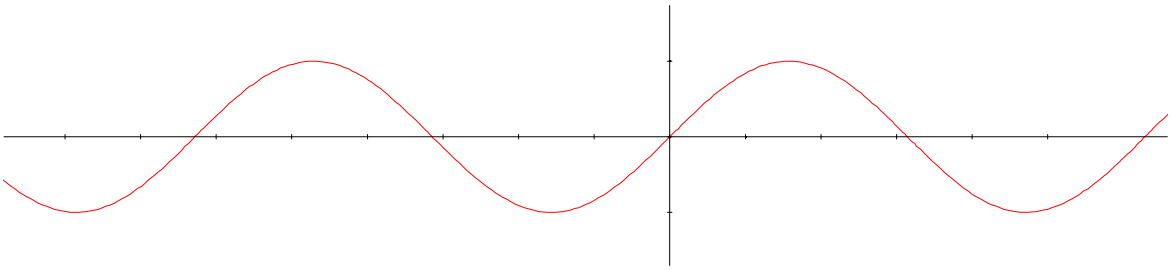
   si $0 \leqslant u < v \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $\sin(u)<\sin(v)$. Donc f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   Et si $\frac{\pi}{2} \leqslant u < v \leqslant \pi$, alors $\sin(u)>\sin(v)$. Donc f est strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

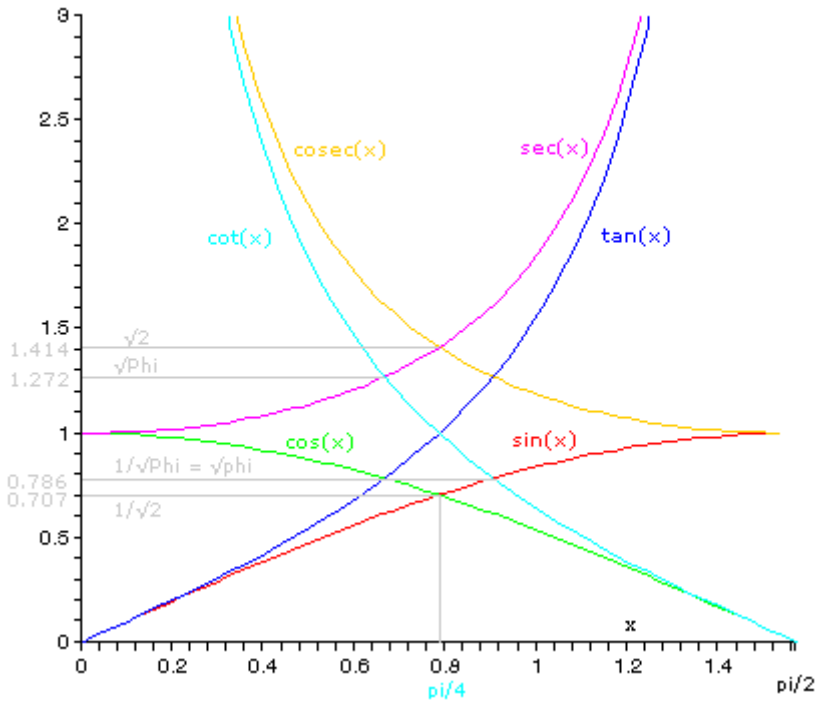
x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

La fonction f admet 1 pour maximum, atteint en $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (k entier). De même, la fonction f admet –1 pour minimum atteint en $x= -\frac{-\pi}{2}+2k\pi$ (k entier)

4. La courbe :



The inverse ratio to the tangent is the **cotangent** or **cot** i.e. Adj/Opp; cot(x)=1/tan(x) the inverse ratio to the cosine is the **secant** or **sec** i.e. Hyp/Adj; sec(x)=1/cos(x) the inverse ratio to the sine is the **cosecant** or **cosec** or sometimes **csc** i.e. Hyp/Opp; csc(x) = 1/sin(x)



III Opérations élémentaires.

<u>*Proposition*</u> *(1.A)* : Soient f et g deux fonctions d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g. On a $f+g$, $f-g$ et $f\times g$ qui ont pour ensemble de définition $D_f \cap D_g$. De plus, f/g a pour ensemble de défintion $(D_f \cap D_g)\backslash\{x\in \mathbb{R} / g(x)=0\}$

<u>Démonstration par double inclusion :</u> ….

<u>*Proposition*</u> *(1.B) :* Soient f et g deux fonctions strictement croissantes (resp. strictement décroissantes), alors $f+g$ est strictement croissantes (resp. strictement décroissante).

→ démonstration en exercice.

<u>*Proposition*</u> *(1.C) :* Soit f une fonction et soit λ un réel. Si $\lambda>0$ alors λf a le même sens de variation que f. Si $\lambda<0$ alors λf a un sens de variation contraire à celui de f.

→ Trouvez les variations de $x^2+|x|$.

IV Composition de fonctions.

Exemple : Dans une entreprise, je vais utiliser la fonction Salaire en fonction du nombre d'heures (h) effectuées pour payer mes ouvriers. Pour calculer leur impôt sur le revenu, ils doivent utiliser la fonction Impôt en fonction du salaire. Comment calculer leur impôt avant même de leur donner leur salaire ? Impôt(Salaire(h)) mais ce calcul m'oblige à utiliser deux calculs de fonction, ce qui n'est pas très efficace. Je vais donc plutôt créer une fonction fait le calcul de l'impôt en fonction du nombre d'heure en un coup : Impôt O Salaire (lire « impôt rond salaire »)

Soient f et g deux fonctions

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & g(x) \arrow[r, mapsto, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

Exemples : $f(x)=2x+3$ et $g(x)=\frac{1}{x}$

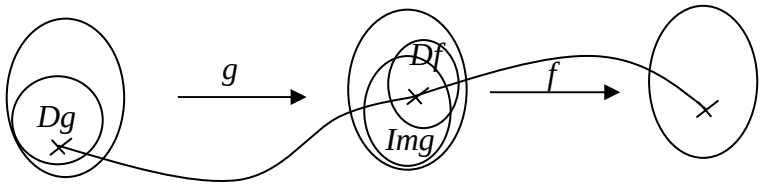
$fog(x)=\frac{2}{x}+3$

$gof(x)=\frac{1}{2x+3}$

<u>*Définition :*</u> Soient f et g deux fonctions d'ensembles de définition Df et Dg. On appelle **composition** de g et f la fonction notée ***fog*** définie par $fog(x)=f(g(x))$. On a en outre

$$Dfog=\{x\in Dg/g(x)\in Df\}.$$

En terme de patatoïdes :



Retour à l'exemple :

$$\mathbb{R}\setminus\{0 \xrightarrow{g} \mathbb{R}\setminus\{0 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Cette composition g et f ne pose aucun problème, l'ensemble d'arrivée de g étant contenu dans l'ensemble de départ de f. En effet, la condition $g(x)\in Df$ se traduit par $\sqrt{x+1}\in\mathbb{R}$, ce qui est toujours vérifié. Donc $Dfog=\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R} \quad \overset{g}{\dashrightarrow}$$

En revanche, ici un problème se pose : Quand $f(x)=0$, on ne peut pas calculer $g(f(x))$.. La condition $f(x)\in Dg$ dans l'ensemble de définition de gof prend tout son sens : $2x+3\in$ I, R\{0}.

D'où, $2x+3\neq 0$ donc $x\neq\frac{-3}{2}$. Ainsi, $Dgof=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-3}{2}\right\}$ et on peut composer :

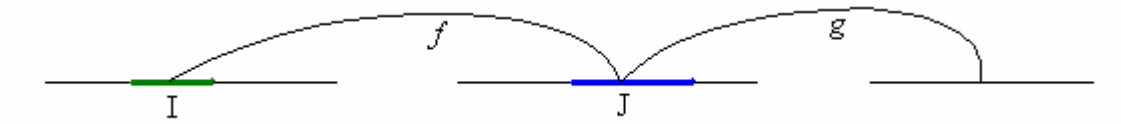
$$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-3}{2}\right\}\xrightarrow{f}\mathbb{R}\setminus\{0\}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$$

→ Composer les fonctions suivantes en prenant soin de calculer l'ensemble de définition au préalable: $f(x)=2x^2$; $g(x)=\sqrt{2x-3}$ et $h(x)=\frac{1}{x}$. [fog, 4x-6,I, R ;gof,$\sqrt{4x^2-3}$]-∞ ;$\sqrt{3}/2$]U[$\sqrt{3}/2$;+∞[;hog,$1/\sqrt{2x-3}$,]3/2 ;+ ∞[;goh,$\sqrt{2/x-3}$,]0 ;2/3] ;foh,$2/x^2$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;hof,$1/2x^2$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;fogoh,4/x-6,]0 ;2/3]

<u>*Théorème*</u> *(1.D)* : Soient f et g deux fonctions strictement monotones. Soient I un intervalle inclus dans Df et J un intervalle inclus dans Dg tel que pour tout x dans I, $f(x)$ soit dans J.

Lorsque f et g varient dans le même sens alors gof est strictement croissante sur I.

Lorsque f et g varient en sens contraires, alors gof est strictement décroissante sur I.



Démonstration : Si f et g ont même sens de variation, on les suppose toutes les deux croissantes, ce qui ne changera pas le résultat. Considérons a et b deux réels de I tels que $a<b$. Puisque f est strictement croissante sur I, on a $f(a)<f(b)$ avec $f(a)$ et $f(b)$ dans J. Mais g est strictement croissante sur J, donc $g(f(a))<g(f(b))$. Ainsi, partant de $a<b$ on a $gof(a)<gof(b)$, donc gof est strictement croissante sur I.

Si f et g ont des sens de variation différents, on peut supposer f croissante et g décroissante. Comme précédemment, on prend $a<b$ et la croissance de f donne $f(a)<f(b)$ avec

$f(a)$ et $f(b)$ dans J. On utilise alors la décroissance de g qui donne $g(f(a))>g(f(b))$ et gof est décroissante sur I.

Les deux cas manquant découlent de la même preuve.

<u>*Conclusion*</u> : La loi « o » semble bien être le meilleur candidat pour supplanter le « × » si l'on veut un modèle qui colle aux entiers.

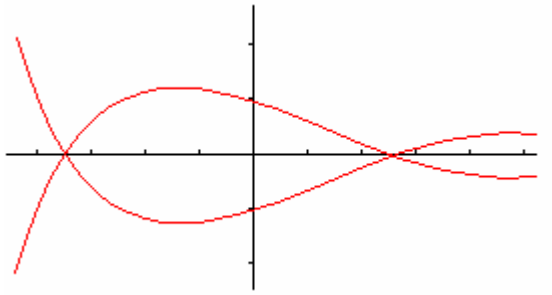
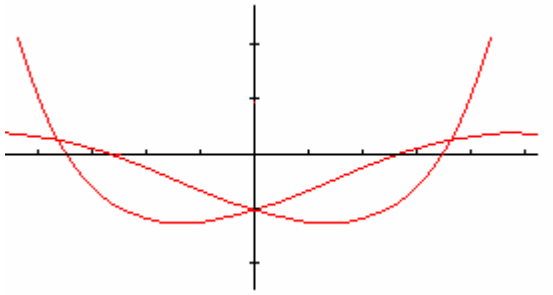
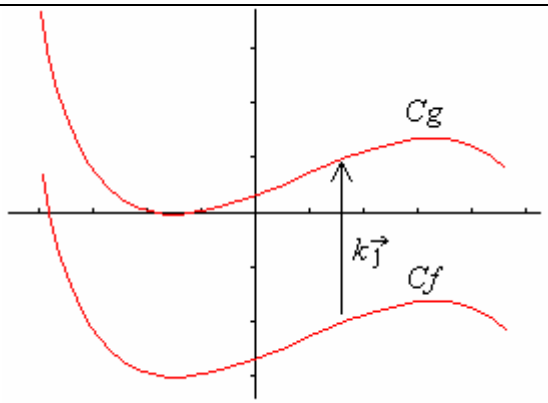
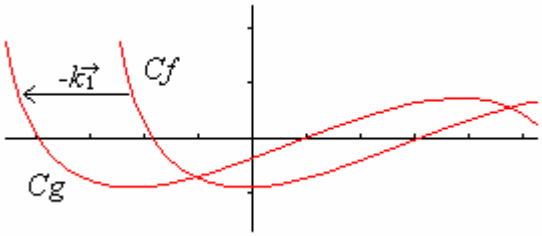
<u>*Notation*</u> : Pour ces raisons, si l'on veut écrire *fofo…of* (*n* fois), on écrira f^n.

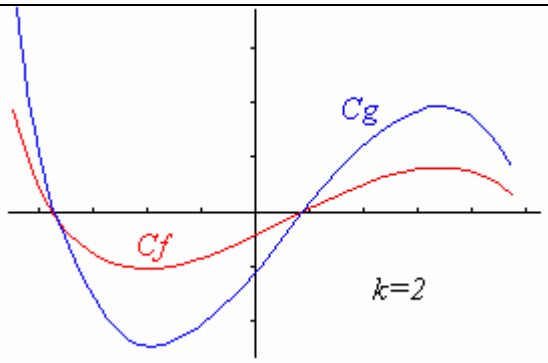
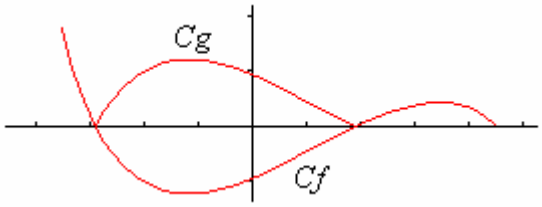
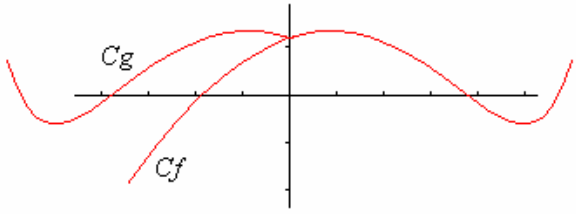
→ Si f est paire et D_{gof} est symétrique par rapport à O, alors gof est paire.

Si f et g sont impaires et D_{gof} est symétrique par rapport à O, alors gof est paire.

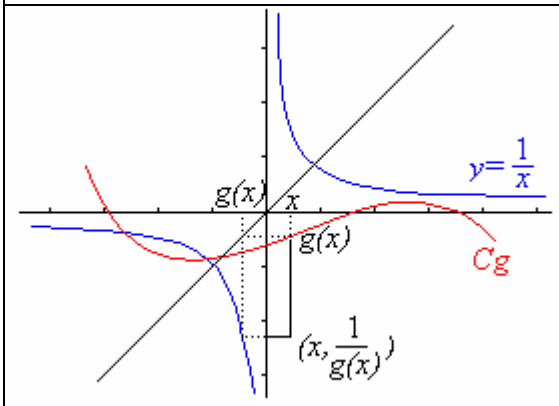
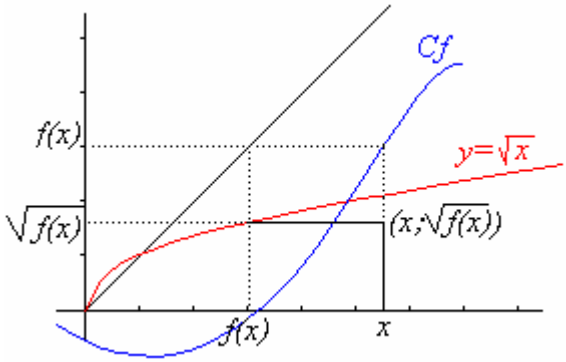
V D'une courbe à l'autre.

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction de I, R dans I, R. On suppose connue la courbe Cf. On s'intéresse à la courbe d'une fonction obtenue comme transformation de f.

1. $g(x)= -f(x)$. Cg s'obtient comme la courbe symétrique de Cf par la symétrie axiale d'axe l'axe des abscisses.	
2. $g(x)= f(-x)$. Cg s'obtient comme la courbe symétrique de Cf par la symétrie axiale d'axe l'axe des ordonnées.	
3. $g(x)=f(x)+k$. où k est un réel. La courbe Cg s'obtient en translatant la courbe Cf par la translation de vecteur $k\overrightarrow{\ }$,j.	
4. $g(x)=f(x+k)$. où k est un réel. La courbe Cg s'obtient en translatant la courbe Cf par la translation de vecteur $-k\vec{i}$	

5. $g(x)=kf(x)$. où k est un réel. La courbe Cg s'obtient à partir de Cf à partir d'une affinité d'axe [Ox) et de rapport k.	
6. $g(x)=\|f(x)\|$. Cg s'obtient à partir de Cf en conservant les points de Cf pour lesquels l'ordonnée est positive et en traçant C-f pour les points manquant.	
7. $g(x)=f(\|x\|)$. Cg s'obtient en conservant les points de Cf pour lesquels l'abscisse est positive et en complétant par une symétrie axiale d'axe [Oy)	

8. $h(x)=fog(x)$. C_h est en général très difficile à obtenir à partir de Cg et Cf (exception faite des six cas précédents). Nous allons néanmoins voir comment faire pour tracer quelques points :

Exemple 1 : $h(x)=1/g(x)$	Exemple 2 : $h(x)=\sqrt{g(x)}$
	

Dans le cas général, on étudie la fonction composée :

Exemple d'étude : $h(x)=\sqrt{x^2+5}$ compo de deux fonctions et tracé d'un point…. par la méthode ci-dessus… intro de l' equivalent à x en l'infini pour le tracé…