Angles orientés.

I Introduction.
II Quelques propriétés.
III Quelques formules de trigonométrie.
IV Coordonnées polaires.

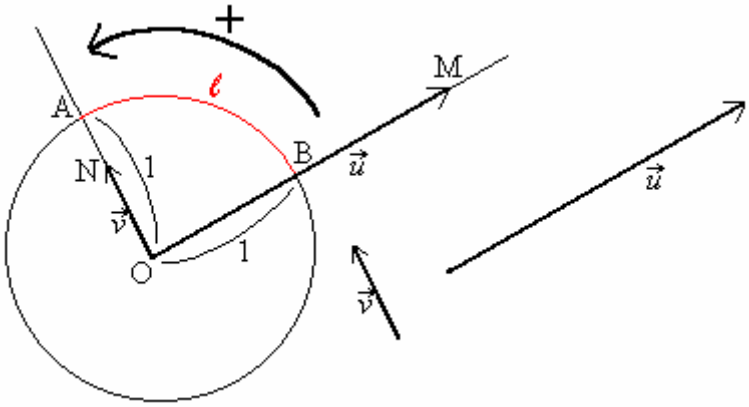
On se rapproche de la structure des nombres. On sait additionner deux nombres, les soustraire, utiliser le zéro. On aimerait bien faire de même avec les angles. Si le zéro ne pose pas de problèmes, il en est différemment de l'addition : en effet, nous sommes bien en peine pour déterminer une mesure de $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}$ si nous n'avons pas de dessin sur lequel nous appuyer. Ne parlons même pas de la soustraction puisque l'opposé d'un angle géométrique n'existe pas.

I Introduction.

On sait définir un **angle géométrique** $\widehat{ABC}$, on va tenter de compléter la notion d'angle en utilisant les vecteurs et leur orientation intrinsèque.

Comment définir l'angle entre les deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Pour cela, on utilise deux représentants d'origine O. Mettons $\vec{u}=\overrightarrow{ON}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OM}$.



On sait que $\widehat{BOA}=l$ où l est la longueur de l'arc AB (en effet, OA=OB=1). Il s'agit d'une mesure en radian de cet angle. (on rappelle que la mesure en radian et la mesure en degré sont proportionnelles).

1er problème : Mais il faut préciser si on parle de l'angle saillant ou de l'angle rentrant ? En effet, $2\pi-l$ est aussi une mesure de l'angle $\widehat{BOA}$. On impose alors un sens de parcours, le **sens direct** (ou sens trigonométrique, ou sens positif) qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

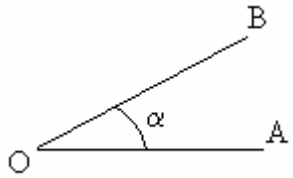
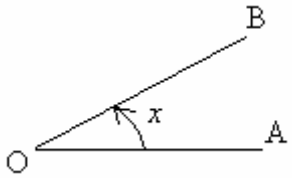
2nd problème :Mais rien ne permet de déterminer le nombre de tours que l'on fait pour aller de B à A. Dans ce cas, on est obligé de considérer que l'on peut faire plusieurs tours avant de rallier A. On appelle **mesure en radian** de l'angle $\widehat{BOA}$ l'un quelconque des réels $l+2k\pi$ avec k parcourant les entiers relatifs.

On note donc $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=l+2k\pi$ (avec $k\in\mathbb{Z}$)

Parmi toutes les mesures en radian, il en est une et une seule dans l'intervalle]-π; π] appelée **mesure principale** de l'angle.

Trouvez les mesures principales des angles suivants : $10\pi/2$; $-4\pi/3$; $127\pi/6$; -18 ; $10^{12}\pi/12$.

Défi : Montrer que la mesure principale de α : $\alpha-2\pi\ [\alpha/2\pi]-2\pi\ [\alpha/\pi]$.

Angles géométriques vs. Angles orientés :	
	
L'angle géométrique $\widehat{AOB}$ a pour mesure le nombre α (en radian) On écrit $\widehat{AOB}=\alpha$ et l'on a toujours $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$	Le réel *x* est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, le sens étant donné par la flèche. On écrit $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=x+2k\pi$.

Il est impossible de donner une bonne théorie des angles orientés dans l'espace.

Définition : Un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est dit **direct** si $\left(\vec{i},\vec{j}\right)=\frac{\pi}{2}$ et **indirect** si $\left(\vec{i},\vec{j}\right)=\frac{-\pi}{2}$.

II Quelques propriétés.

Le cosinus (resp. le sinus) d'un angle orienté est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelconque de ses mesures en radians.

Si on a toujours $\cos(\widehat{AOB})=\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, en revanche, $\sin(\widehat{AOB})$ peut être l'opposé de $\sin\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

Proposition (6.A) : Si $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0+2k\pi$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
Si $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\pi+2k\pi$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Théorème (Relation de Chasles 6.B) : $\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\left(\vec{u},\vec{w}\right)$

Démonstration : Il suffit de considérer tous les cas (fastidieux, donc admis.)

Propriété (6.C) :

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\left(\vec{v},\vec{u}\right)+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}.$$
$$\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}.$$
$$\left(-\vec{u},\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}.$$
$$\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}.$$

Démonstration : Faire faire toutes les démos par les élèves afin que Chasles rentre dans les esprits.

Intérêt pour les transformations: on peut, par exemple définir correctement la rotation de centre O et d'angle α : $r_{O,\alpha}(M)=M'$ équivaut à $OM=OM'$ et $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)=\alpha$

Proposition (6.D) : Les rotations et les translations conservent les angles orientés.

Proposition (6.E) : Les réflexions changent un angle orienté en son opposé.

Défi : Montrer que $y=\sqrt{x^2+1}$ est un arc d'hyperbole (équilatère).

III Quelques formules de trigonométrie.

$\cos(-x)=\cos(x)$ $\sin(-x)=-\sin(x)$ $\tan(-x)=-\tan(x)$	$\cos(\pi-x)=-\cos(x)$ $\sin(\pi-x)=\sin(x)$ $\tan(\pi-x)=-\tan(x)$	$\cos(x+\pi)=-\cos(x)$ $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$ $\tan(x+\pi)=\tan(x)$	$\cos(\pi/2-x)=\sin(x)$ $\sin(\pi/2-x)=\cos(x)$ $\tan(\pi/2-x)=\frac{1}{\tan x}$
$\cos(x+\pi/2)=-\sin(x)$ $\sin(x+\pi/2)=\cos(x)$ $\tan(x+\pi/2)=\frac{-1}{\tan(x)}$	En utilisant le cercle trigonométrique, remplir les 15 formules. (on ne fournit que la partie de gauche)		

On rappelle que $\boxed{\cos^2 x+\sin^2 x=1}$

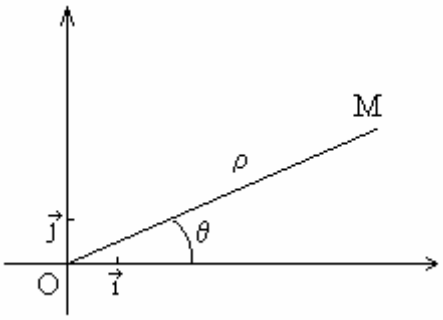
Exprimez $\frac{1}{\cos^2 x}$ et $\frac{1}{\sin^2 x}$ en fonction de $\tan(x)$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos(3x)=\cos(2x)$ puis $\sin(x)=\sin(5x)$ et enfin $\cos(3x)=\sin(x)$.

Résoudre dans $[0;2\pi]$, $1-\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{3}-x)=0$.

Résoudre dans $[0;2\pi[$, les inéquations suivantes : $\cos(2x-\pi/5)\geqslant -1/2$; $\cos(2x+\pi/3)\leqslant -\sqrt{2}/2$; $1/2\leqslant\cos(2x-\pi/3)\leqslant\sqrt{3}/2$; $\sin(3x)\leqslant 1/2$.

IV Coordonnées polaires.



Définition : Pour tout point $M\neq O$, le couple (ρ,θ) est unique avec $\rho=OM$ et $\theta=\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$. Ce sont les **coordonnées polaires** de M. On note $M(\rho,\theta)$Le nombre ρ s'appelle le **module** et θ l'**argument**.

donnez les coordonnées polaires des points dont les coordonnées sont en cartésien $A(\frac{1}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2})$, $B(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Même jeu mais dans l'autre sens : $C(2;5\pi/6)$; $D(\sqrt{2};\pi/4)$; $E(\sqrt{6};-\pi/2)$.

Défi : Tracez l'ensemble des points de coordonnées polaires $(x,x\pi)$.

Théorème (6.F) : Dans les conditions sus-décrites, si M(ρ,θ) et M(x,y) sont respectivement les coordonnées en polaires et en cartésiens, alors, on a

$\boxed{x=\rho\cos(\theta)}$ et $\boxed{y=\rho\sin(\theta)}$

$$\boxed{\rho=\sqrt{x^2+y^2}}$$

Addendum : La formule de la mesure principale d'un angle en utilisant la partie entière :

$$\alpha+2\pi\left(\left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]-\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]\right)$$

Saga

Quels sont les polygones réguliers constructibles ?
(Sous-entendu « à la règle et au compas ».)
Ce problème constitue une authentique saga dont les racines remontent à la Grèce antique. Quelques résultats plus ou moins faciles permettent de ramener la recherche de tels polygones à celle de nombres premiers de la forme $2^{(2^n)}+1$, appelés nombres de Fermat. (En tout état de cause, il est très facile de voir que si le polygone régulier à N sommets est constructible, celui à $2N$ sommets l'est aussi. Pourquoi ?)

Cinq nombres de Fermat nous sont connus jusqu'à présent : 3, 5, 17, 257, 65 537. Autrement dit, le « partage d'un cercle en un nombre impair de parties égales » toujours à la règle et au compas, n'aurait pour l'instant qu'un nombre fini de solutions parfaitement répertoriées (il y en a 31) !

Les chiffres

7 Le plus petit nombre de sommets d'un polygone régulier non constructible à la règle et au compas.

1801 Date de parution des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss. Il y propose une construction effective du polygone régulier à 17 sommets et calcule la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$!
(Voir ci-dessous.)

4 294 967 295 Plus grand nombre impair de sommets d'un polygone régulier que l'on sait constructible à la règle et au compas.

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\right)$$

Signé Gauss.