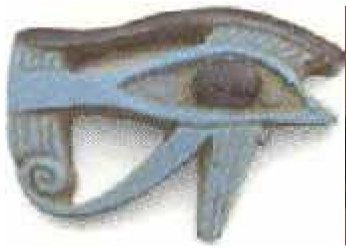
Suites.



I Introduction.

On place l'année 0 un capital C_0 dans une banque qui propose un placement à **intérets fixes** (i.e. les intérêts ne sont calculés que sur C_0) au taux t. On a alors les années suivantes les capitaux suivants :

$C_1=C_0+t.C_0=(1+t).C_0$ à la fin de la première année;
$C_2=(1+2t).C_0$ à la fin de la deuxième année,
et ainsi de suite $C_n=(1+nt).C_0$.

Cette fois-ci, dans une autre banque, on me propose un placement à **intérêts composés** (i.e. les intérêts sont calculés sur le capital qui change chaque année comme sur tout compte épargne classique) aux taux t. On obtient :

$C_1=C_0+t.C_0=(1+t).C_0$ à la fin de la première année;
$C_2=C_1+t.C_1=(1+t)^2.C_0$ à la fin de la deuxième année,
et ainsi de suite $C_n=(1+t)^n.C_0$.

Nous venons d'observer deux suites.

__Définition :__ Une **suite** est la donnée d'une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \to \varphi(n)=u_n$.
On note plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n) pour la suite, qu'il ne faudra pas confondre avec u_n.

L'entier n représente l'année. Il est donc illusoire de penser que n peut être négatif par exemple.

Les suites peuvent démarrer à 1 au lieu de 0. C'est le piège le plus classique car il faut alors réadapter toutes les formules données dans la suite.

Dans les exemples précédents, on a tour à tour $\varphi(n)=u_n=(1+nt).C_0$ puis $\varphi(n)=u_n=(1+t)^n.C_0$.

On a besoin de savoir comment va varier dans le temps une suite (cours de la bourse par exemple), il est donc important de considérer la définition suivante :

__Définition :__ On dit que
(u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n.
(u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout n.
(u_n) est **constante** si $u_{n+1}=u_n$ pour tout n.

__Remarque__ : Pour étudier la variation d'une suite, il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$.

Défi : (critère de d'Alembert) Dans le cas où u_n est non-nul, sauriez-vous trouver un autre critère de variation que l'on pourrait utiliser sur $u_n=5^{1/n}$, par exemple.

II Suites arithmétiques et géométriques.

1. Suites arithmétiques.

Il s'agit des suites du type de celle des capitaux placés à intérêts fixes citée plus haut.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** de premier terme u_0 et de raison r si (u_n) est définie par $\boxed{u_{n+1}= u_n+r}$.

Remarque : Si r=0, alors la suite est constante. Si u_0=0 et r=1, alors la suite (u_n) est la suite des entiers naturels.

Corollaire de la définition (10.A) : Pour déterminer si une suite est arithmétique, il suffit donc de montrer que $u_{n+1}-u_n$ est une constante.

Propriété (10.B) : Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors on a $\boxed{u_n=u_0+nr}$.

Démonstration : Par récurrence à faire aux élèves avec soin.

Je place un capital de 2000€ à intérêts fixés au taux de 1,6%. A partir de quelle année pourrais-je m'acheter la guitare dont je rêve ? [n>62,5]

Sauriez-vous trouver la somme des 100 premiers entiers ? L'histoire raconte que, le professeur de Gauss, fatigué de ses questions lui posa se problème pour avoir du répit. Gauss trouva en moins d'une minute !
S=0+1+2+3+4+…..+97+98+99 ? L'astuce consiste à calculer deux fois la somme :
2S=(0+99)+(1+98)+(2+97)+(3+96)+…+(96+3)+(97+2)+(98+1)+(99+0)=100*99.

Propriété (9.C) : Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors on a $\boxed{S_n=\sum_{i=0}^{n} u_i=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}}$

Procédé mnémotechnique : (nombre de termes)(1^er terme + dernier terme)/2

Démonstration : idem que plus haut.

Trouver la somme de tous les nombres à trois chiffres à la fois pairs et divisible par 3.

Défi : On fait un triangle de Pascal à l'envers. Si au lieu de 5, on va jusqu'à 17, quelle sera le dernier nombre ?
[La somme des termes extrêmes double à chaque fois. Car la somme des termes équidistants des extrêmes est la même dans une suite arithmétique.

0		1		2		3		4		5
	1		3		5		7		9	
		4		8		12		16		
			12		20		28			
				32		48				
					80					

2. Suites géométriques.

Il s'agit des suites du type de celle des capitaux placés à intérêts composés citée plus haut.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** de premier terme u_0 et de raison q si (u_n) est définie par $\boxed{u_{n+1}= q.u_n}$.

Remarque : Si q=0, alors la suite est nulle. Si u_0=0, alors la suite est nulle. Si q=0, alors seul u_0 peut être non-nul.

Corollaire de la définition (10.D) : Pour déterminer si une suite est géométrique quand elle est non-nulle, , il suffit donc de montrer que u_{n+1}/u_n est une constante.

Propriété (10.E) : Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors on a $\boxed{u_n=q^n.u_0}$.

Démonstration : Par récurrence à faire aux élèves avec soin.

Sur un ruban de papier, vous pouvez réaliser les deux opérations suivantes :
P : plier en deux en amenant la moitié droite sur la moitié gauche.
C : couper au milieu et superposer le morceau de droite sur celui de gauche.

1. Combien obtient-on de morceaux en faisant ppc ? [5]
2. Si on alterne cpcpcpcp… au bout de combien de coupes dépassera-t-on les mille morceaux ? Et combien aura-t-on de morceaux alors ? [un pli n'augment pas le nombre de morceaux. Une coupe en kième position accroît celui-ci de 2k-1. Après chaque coup, on trouve 1,4,16,64,256,1024 soit un total de 1366 morceaux.

La capacité des disques durs augmente de 50% tous les ans. Quand sera-t-elle plus de 25 fois ce qu'elle est aujourd'hui ?

La puissance des ordinateurs est en moyenne multipliée par 4 tous les trois ans. Combien d'année au minimum me faudra-t-il attendre pour voir la puissance de mon ordinateur multipliée par 1000 ?

On plie 39 fois une feuille de papier de 0,5mm d'épaisseur. Puis-je glisser, dans son épaisseur, cette feuille entre la Terre et la Lune ?

Le problème du souverain indien Chiram : Payez-moi avec un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux grains sur la seconde, trois sur la troisième et ainsi de suite jusqu'à la 64$^{\text{ième}}$ case soit 2^{63} grains = 9.10^{18}g > Vol. de la Terre.

In an old Star Trek episode (« the trouble with tribbles », The Original Series number 42), capitain Kirk and his ensign, the vulcanian Spock have troubles with a cute and furry little animal : the tribble. Its metabolism is completly devoted to breeding purpose. They swarm so fast that the Enterprise is soon full of tribbles.
Kirk : « They are hundreds of thousands. »
Spock: "1 771 561. That's assuming one tribble multiplying with a litter of ten producing a new generation every twelve hours over three days."
Are you better than Spock? (Vulcanians are not as good as they seem…)

Propriété (9.F) : Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors on a
$$\boxed{S_n=\sum_{i=0}^{n}u_i=u_0\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Procédé mnémotechnique : (1er terme)(1-raison puissance nombre de termes)/(1-q).

Démonstration : L'astuce est un peu la même que celle de Gauss : On écrit S et qS
S=$u_0+qu_0+q^2u_0+\ldots+q^nu_0$
qS=$qu_0+q^2u_0+q^3u_0\ldots+q^{n+1}u_0$
(1-q)S= $u_0-q^{n+1}u_0$

Problème de la Grecque sur le livre ….

Si je pars de 14 en additionnant les doubles : 14+28+56+112+224+448+896+1792.. en décalant de deux à chaque fois, on obtient 1428571428571… D'autre part, 1/7=0,14285714… Pourquoi ?

Défi : une suite arithmético-géométrique.

Le nombre $7+7^2+7^3+7^4+\ldots+7^n$ est-il divisible par 400 ?

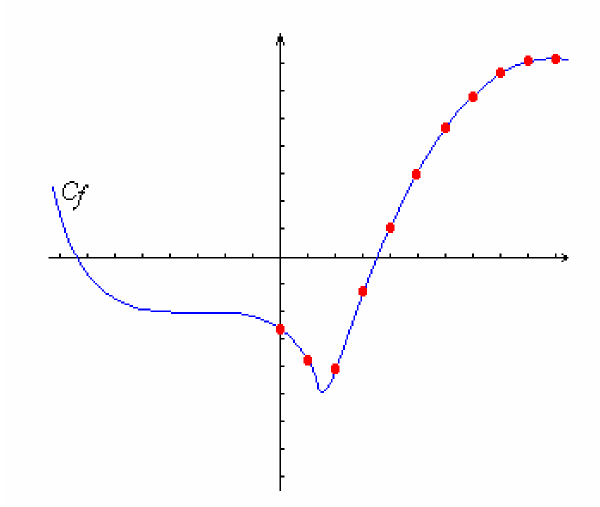
Je jette une balle du haut de la flèche Saint-Michel. A chaque rebond, elle perd un tiers de sa hauteur. Quelle distance totale ma balle aura-t-elle parcourue au final ?

Calculez $\sum_{k=1}^{10} 9^{k-1}10^{10-k}$.

III Suites définies par une fonction *f*.

1. Suites de la forme $u_n=f(n)$.

Dans ce cas-là, la suite n'est ni plus ni moins que la fonction «passée au crible » des entiers. En effet, on ne garde que les points d'abscisse entière (positive) de la courbe représentative de *f*.



Exemple avec $u_n=n^2-n-1$. Conjecturez le comportement de la suite, puis prouvez-le.

Idem avec $u_n=1/n$.

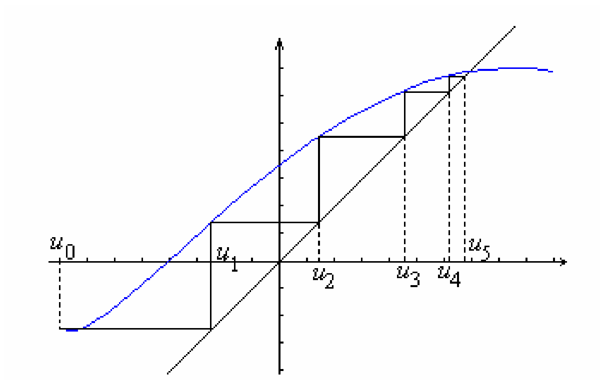
Qu'en concluez-vous ?

> *Proposition (10.G)* : Si $u_n=f(n)$ avec *f* une fonction, alors on a
> Si *f* est croissante sur [0 ;+∞[, alors (u_n) est croissante.
> Si *f* est décroissante sur [0 ;+∞[, alors (u_n) est décroissante.

La réciproque est fausse en général (voir l'exemple précédent $u_n=n^2-n-1$). D'autre part, il faut faire attention à l'écriture : une fonction est croissante sur un intervalle alors qu'une suite est simplement croissante.
Démonstration : Les élèves la font seuls.

2. Suites de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$.

Là, c'est beaucoup plus dur. On donne la courbe représentative de *f* et il faut trouver tous les termes à partir du premier.



Faire de même avec $u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n}$ et $u_0=3$.

Défi : Idem avec $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$ en conjecturant les variations en fonction de u_0.

Sur un même dessin, on demande de représenter les premiers termes des deux suites suivantes : $u_n=\dfrac{1}{n}$ et $v_{n+1}=\dfrac{v_n}{v_n+1}$.

Remarquer qu'il s'agit de la même suite vue de deux façons différentes.

Faire la même chose avec la suite arithmétique de premier terme –2 et de raison 1.

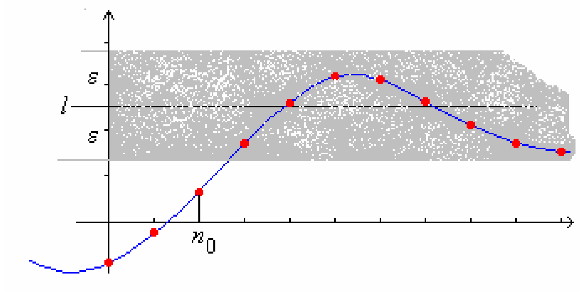
IV Convergence d'une suite.

1. Définition.

Dans le cas où $u_n=f(n)$, il est assez intuitif de faire intervenir le tube comme dans le cas des limites de fonction. Par exemple, pour $u_n=1/n$, on a bien envie de dire que u_n converge vers 0. Si $u_n=1-1/n$, on voit bien que la situation est guère différente et que u_n tend vers 1. Nous reprenons donc l'idée du tube qui a bien fonctionnée pour les fonctions.

Reprendre $u_n=\dfrac{\sin n}{n}$

Définition : Dire que le réel l est la limite de la suite (u_n) signifie que pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n>n_0$, $|u_n-l|<\varepsilon$ (*i.e.* u_n est dans le tube). On $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$ et on dit que (u_n) **converge** vers l.



Autrement dit, les termes de la suite sont tous dans un intervalle contenant l à partir d'un certain rang n_0.

Ou encore, tout intervalle centré en l contient tous les termes u_n sauf un nombre fini.

2. Divergence.

Définition : Une suite **diverge** si elle ne converge pas.

Définition : Soit M>0. S'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n>n_0$, on ait $u_n>M$, on dit que (u_n) a pour limite $+\infty$ et on note $\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty$.

On peut donc avoir $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ ou $-\infty$, mais la situation peut être plus catastrophique :En effet, une suite qui n'a pas de limite : l'exemple capital étant $u_n=(-1)^n$.

Propriété (10.H) : Si $u_n=f(n)$ avec f une fonction, alors on a :

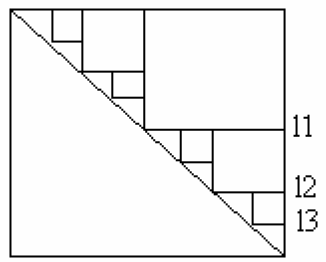
$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{x\to\infty} f(x)$$

Démonstration : évident mais pour l'écrire proprement il faut le faire.

Voilà qui règle le cas où $u_n=f(n)$, mais dans le cas des suites récurrentes, c'est plus difficile, d'autant que des points peuvent être attracteurs ou répulsifs. Retour sur l'exemple de $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$. Il est clair que si (u_n) admet une limite, alors on doit avoir $l=\dfrac{2l+1}{l+1}$, autrement dit, une limite doit correspondre à un point d'intersection avec la première bissectrice du repère.

D'où les points limites possibles : $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$, le premier étant attractif et le second répulsif.

La longueur de la ligne brisée est $l_n = 2$ pour tout n. et on dirait que $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = \sqrt{2}$ la



diagonale.

V Opérations sur les limites.

<u>*Théorème (10.I)*</u> : On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=b$ avec a et b réels. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n+v_n=a+b\ ;\quad \lim_{n\to+\infty} u_n-v_n=a-b\ ;\quad \lim_{n\to+\infty} u_n.v_n=ab\ ;\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}=a/b\ (b\neq 0)$$

<u>*Théorème des gendarmes (10.J)*</u> : Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. S'il existe n_0 tel que pour tout entier $n>n_0$ on ait $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=a$.

<u>*Démonstration*</u> : A faire….

Trouvez $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{2n}$.

<u>*Théorème (Limites de suites géométriques 10.K)*</u> : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Si $u_0=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Sinon, si $-1<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$,
si $q=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =u_0$,
si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =\mathrm{sgn}(u_0).\infty$
si $q<-1$, alors (u_n) diverge. (admis).

VI Quelques classiques.

1. On trouve les suites un peu partout dans la littérature. Notamment dans les écrits de Borgès (à lire absolument) :

« Achille, symbole de rapidité, doit atteindre la tortue, symbole de lenteur. Achille court dix fois plus vite que la tortue et lui accorde 10 mètres d'avance. Achille parcourt ce mètre, la tortue parcourt un décimètre ; Achille parcourt ce décimètre, la tortue parcourt un centimètre ; Achille le millimètre, la tortue un dixième de millimètre, et ainsi de suite à l'infini, de sorte qu'Achille peut courir pour toujours sans l'atteindre. Tel est l'immortel paradoxe […] Il suffit de fixer la vitesse d'Achille à un mètre-seconde, pour établir le qui lui est nécessaire :
$10+1+1/10+1/100+1/1000+...$
La somme limite de cette progression géométrique infinie est 11,1111111… mais on ne l'atteint jamais. C'est-à-dire que le trajet du héros sera infini et que celui-ci courra pour

toujours, mais sa route s'épuisera avant douze mètres, et son éternité ne verra pas la fin de douze secondes. […] Le paradoxe de Zénon d'Elée n'attente pas seulement à la réalité de l'espace, mais à celle du temps, plus vulnérable et plus fine. […] Toucher à notre idée de l'univers, pour ce petit morceau des ténèbres grecques ? » J-L Borges, *La course perpétuelle d'Achille et de la tortue* dans *Discussion (1932).*

2. Mais on en trouve aussi chez Marcel Aymé par exemple :

« Bientôt, la malheureuse ubiquiste fut saisie d'une frénésie de luxure et eut des amants sur tous les points du globe. Le nombre en augmentait au rythme d'une progression géométrique dont la raison était 2,7.
Dans une seule île des Marquises, la race lui ayant paru belle, l'insatiable amoureuse s'y multiplia par trente-neuf. En l'espace de trois mois, elles se fut répandue sur le globe en neuf cent cinquante exemplaires. Six autres mois plus tard, ce nombre atteignit aux environs de dix-huit mille, ce qui est considérable. La face du monde en était presque changée. Dix-huit mille amants subissaient l'influence de la même femme, et à leur insu s'établissait entre eux une sorte de parenté dans leur manière de vouloir, de sentir, d'apprécier. » Marcel Aymé, *Le Passe-muraille*.
La raison de la suite décrite est-elle bien 2,7 ?
Au bout de six mois, de combien doit être le nombre d'amants pour que la suite ait une raison de 2,7 ?

3. Le cas le plus élémentaire qui apparaît en économie est le suivant : Je fais des économies pour partir en vacances. J'ai décidé à partir du 1er janvier de verser chaque jour dans mon cochon rose autant d'euros que le numéro du jour dans l'année. A chaque fois, je mets la somme correspondante à l'aide de billets de 10€ et de pièces de 1€, avec le minimum de pièces possible. Je partirai en vacance le premier jour où il y aura dans ma tirelire autant de pièces que de billets. Quel est-il ? Puis-je me payer la destination de mes rêves à 4900€ ?

4. You're sitting in math class, minding your own business, when in walks a Bill Gates kind of guy - the real success story of your school. He's made it big, and now he has a job offer for you. He doesn't give too many details, mumbles something about the possibility of danger. He's going to need you for 30 days, and you'll have to miss school. (Won't that just be too awful?) And you've got to make sure your passport's current. (Get real, Bill, this ain't Paris). But do you ever sit up at the next thing he says. You'll have your choice of two payment options:
1. One cent on the first day, two cents on the second day, and double your salary every day thereafter for the thirty days; or
2. Exactly $1,000,000. (That's one million dollars!)

I jump up out of my seat at that. You've got your man, Bill, right here. I'll take that million. I'm out of here. And off you go on this dangerous million-dollar mission. What payment do you choose ?

5. C'est en biologie que les évolutions de population sont les plus habituelles : Soit une population de femelles d'insectes qui vérifie les propriétés suivantes :

- aucune ne vit plus de 2 ans, seulement la moitié survit la deuxième année,
- elles ne pondent que dans la deuxième année et font en moyenne chacune n larves viables dont la moitié sont des femelles.

A un instant initial, on décompte 50 femelles de un an et 25 de deux ans. Nous nous intéressons à l'évolution de cette population une année après, deux ans après ...

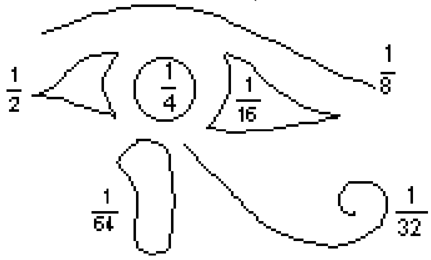
6. Voici un exemple de suite un peu particulière : Un univers impitoyable : Dans un désert, il y a des serpents, des souris et des scorpions. Chaque matin, chaque serpent mange une souris. Chaque midi, chaque scorpion pique un serpent (et ça ne pardonne pas). Chaque

soir, chaque souris mange un scorpion. Au bout d'une semaine, il ne reste plus qu'un animal : une souris.
Combien y avait-il de souris au départ ?

7. On trouve aussi les suites dans l'explication d'un symbole égyptien : l'œil d'Horus.

Les innombrables disputes et luttes entre Horus et Seth sont au centre de la mythologie égyptienne. A la mort de son frère Osiris, Seth s'est emparé du pouvoir. Horus, fils posthume d'Osiris et d'Isis entre en guerre contre son oncle décidé à venger la mort de son père. Au cours d'un combat, Seth arrache l'œil gauche d'Horus, le coupe en six morceaux et le jette dans le Nil. À l'aide d'un filet, Thot récupère les morceaux mais il en manque un ! Thot le rajoute et rend à Horus son intégrité vitale.

L'œil d'Horus se nommait oudjat en égyptien, ce qui voulait dire complet. Il représente un œil humain fardé et souligné de deux marques colorées caractéristiques du faucon pèlerin. Les Égyptiens l'utilisaient pour indiquer les fractions du hékat, unité de mesure de capacité qui servait pour les céréales, les agrumes et les liquides (un hékat valait environ 4,785 litres). Ainsi l'oudjat devint-il par la suite pour les Égyptiens, symbole de lumière et de connaissance (œil du faucon qui voit tout), d'intégralité physique, d'abondance et de fertilité. Et afin de commémorer à tout jamais cette victoire du Bien contre le Mal, ainsi que pour garantir la voyance totale, la fécondité universelle et de bonnes récoltes, les scribes comptables employèrent l'oudjat.



Le soleil et la lune sont ses yeux. La légende dit que si Seth arrache l'œil droit, il s'agit d'une éclipse de soleil et s'il arrache le gauche, d'une éclipse de lune.

En effet, la somme des fractions de l'oudjat ne fait que 63/64 ; le 1/64 manquant est le liant magique ajouté par Thot pour permettre à l'œil de fonctionner. Un élève-scribe fit un jour remarquer à son maître que le total des fractions de l'oudjat ne donnait pas 1 ; il lui fut répondu que le 1/64 manquant pour parfaire l'unité serait toujours fourni par Thot au calculateur qui se placerait ainsi sous sa protection..!