

Homothéties.

I Même pas isométrique !

II Quelques propriétés.

III Voyage intersidéral.

« Il s'agit d'être grand et non de paraître. » Romain Roland.

But : Lier le parallélisme à une notion métrique.

Un point de fuite... Allée de cyprès.

I Même pas isométrique !

Définition : Soit O un point du plan et k un réel non-nul. On note $h_{O,k}$ (parfois même tout simplement h quand on a la flemme et qu'il n'y a pas de risque de confusion) **l'homothétie de centre O et de rapport k** . Il s'agit de la transformation du plan qui, à tout point M associe M' tel que

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

On dit que M' est l'homothétique de M par $h_{O,k}$.



Tracez les homothétiques respectifs A' et A'' de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2, puis celle de rapport $-1/2$.



Tracez l'homothétique de Garfield par l'homothétie de centre O et de rapport 2 puis de rapport -1 .



Remarques : • Si $k=1$ alors $h_{O,k}=\text{Id}$ (pour tout point O).

• Le point O est invariant par une homothétie de centre O ($h_{O,k}(O)=O$).

C'est le seul point invariant si $k \neq 1$.

• Si $k=-1$ alors $h_{O,k}=S_O$.

• Hormis dans les deux cas suscités, **l'homothétie n'est pas une isométrie.**

II Quelques propriétés.

Propriété utile (11.A): O , M et M' sont alignés si et seulement s'il existe une homothétie h telle que $M'=h(M)$.

Démonstration : exercice. (colinéarité quand tu nous tiens.)



Défi : Redémontrer l'existence de la droite d'Euler.

Propriété plus qu'utile (11.B): Si $h_{O,k}(A)=A'$ $h_{O,k}(B)=B'$ alors $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$.

Démonstration : exercice. (Chasles n'est pas loin).

Corollaire de la propriété plus qu'utile (11.C): Une homothétie conserve les relations de colinéarité (i.e. Si $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{C'D'}$, avec la convention A' homothétique de A)

Démonstration : exercice.

Théorème (11.D): L'image homothétique d'une droite est une droite parallèle.

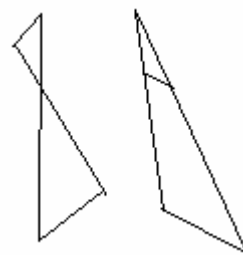
Démonstration : C'est un corollaire du corollaire de la propriété plus qu'utile !

Remarque: Dans le cas où le centre de l'homothétie est sur la droite d , on a $h(d)=d$. On dira que d est **globalement invariante**. Elle n'est pas à proprement parlé invariante car la plupart des points ne sont pas leur propre image.



Quelle est l'image de $d : 2x+y=1$ par $h_{(1;2),3}$?

Remarque : Les configurations de Thalès classiques sont souvent dénommées sous le terme générique de **triangles homothétiques**. Les triangles homothétiques sont donc des cas particuliers de triangles semblables.

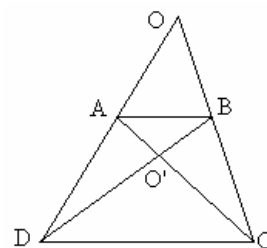


Propriété (11.E): Si G est barycentre du système pondéré $(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)$ alors $h_{O,k}(G)$ est le barycentre de $(h_{O,k}(A_1); \alpha_1), \dots, (h_{O,k}(A_n); \alpha_n)$. Autrement dit, l'homothétie conserve les barycentres.

Démonstration : exercice.



On complète le trapèze ABCD. Montrer que (OO') passe par les milieux de $[AB]$ et de $[CD]$.



Montrer que l'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ avec $A'=h_{O,k}(A)$ et $B'=h_{O,k}(B)$.

Théorème (11.F): Une homothétie de rapport k conserve les angles orientés (en particulier, le parallélisme et la perpendicularité), multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 (et les volumes par $|k^3|$). C'est un agrandissement ($|k|>1$) ou une réduction ($|k|<1$) d'échelle $|k|$.

(admis)

Proposition récapitulative (11.G): Par une homothétie de rapport k ,

L'image	- d'un segment (de longueur l) - du milieu d'un segment - d'une droite - d'un cercle de centre I de rayon r - d'un triangle - d'un quadrilatère	est	- un segment (de longueur $ k l$). - le milieu du segment image. - une droite parallèle. - un cercle de rayon $ k r$ dont le centre est I' , l'image de I . - un triangle de même nature. - un quadrilatère de même nature.
---------	---	-----	---



On considère un cercle C et un point A de C . Quel est le lieu géométrique du milieu M' de $[AM]$ quand M décrit le cercle C ? [cercle de diamètre $[AO]$.]



Défi : Soient C et C' deux cercles, trouver tous les centres des homothéties transformant C en C' .

III Voyage intersidéral.

Dans la mesure où la définition est vectorielle, toutes les propriétés devraient pouvoir s'énoncer dans l'espace de la même façon. Pour le vérifier, voyageons dans le temps et

revoyons toute la leçon au ralenti... Eh bien oui, il suffit de rajouter le rapport de proportionnalité des volumes. Voyons quelques précisions néanmoins.

Proposition (11.H): L'image d'un plan par une translation ou une homothétie est un plan parallèle.

Proposition (11.I): L'image d'un cercle de centre I et de rayon r inclus dans un plan P par une translation ou une homothétie est le cercle de centre I' (image de I), de rayon r' et inclus dans P' , image de P . Dans le cas d'une translation, $r'=r$ et $r'=|k|r$ sinon.

