Exercice 1 : Résoudre :

a) $x^2-5x+6\geq x-3$; b) $(2x+1)^2-2(x+1)^2=0$ c) $(x-3)(-x+5)>(x-3)^2$

d) $\dfrac{-1}{x+2}=x$ e) $\dfrac{x-3}{1-x}\leq 0$

Exercice 2 : Résoudre :

a) $2x^2-2\sqrt{2}x=-1$ b) $x^2+2=1$ c) $\dfrac{1}{(x-1)^2}>1$

d) $4\leq |x-4|<5$ e) $|x+1|+|1-x|=2$

Exercice 3 : Résoudre les équations suivantes : a) $2x=3$; b) $x+2=3$; c) $2x=0$; d) $2x=1$; e) $x+2=0$;

f) $x+2=1$; g) $2-x=0$; h) $2-x=1$; i) $x-2=1$; j) $\dfrac{x}{2}=0$; k) $\dfrac{x}{2}=1$; l) $\dfrac{x}{2}=5$; m) $\dfrac{2}{x}=1$; n) $\dfrac{2}{x}=5$;

o) $\dfrac{2}{x}=0$; p) $\dfrac{2}{3}x=5$; q) $\dfrac{2}{3}x=0$; r) $\dfrac{2}{3}x=-1$; s) $\dfrac{2x-1}{3}=0$; t) $\dfrac{2x-1}{x}=0$; u) $\dfrac{2}{x+1}=1$; v) $\dfrac{3}{x-3}=1$;

Exercice 4 : Résoudre les équations suivantes : a) $9x^2-1=3x+1$; b) $x(3x-2)=4-9x^2$; c) $(2x-1)^2-(3x+2)^2=0$;

d) $(3x+2)^2=(5-2x)^2$; e) $2(x-1)^2-3(2x+1)^2=0$; f) $\dfrac{(2x+1)^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=0$; g) $(x+3)(2x+5)^2=3+x$;

h) $4x^2+4x+1=0$; i) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{2x}{3}+1=0$; j) $3x^2-2\sqrt{3}\,x+1=0$.

Exercice 5 : Résoudre les équations suivantes : a) $x^2=25$; b) $4x^2=25$; c) $5x^2=0$; d) $3x^2=-2$; e) $25x^2-81=0$;

f) $121x^2+1=0$; g) $\pi x^2+\sqrt{11}=0$; h) $(2x-1)^2=3$; i) $(x+2)^2=x^2-4$; j) $4(x+3)^2=x^2-9$.

Exercice 6 : Résoudre les équations suivantes : a) $x^5+4x^4+4x^3=0$; b) $25x^2-4+(5x+2)(4x-7)=0$; c) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{-5x}{6}+\dfrac{15}{2}$; d) $x^2(x-4)+2x(x-4)+(x-4)=0$;

e) $0{,}09x^2-1{,}21=0$; f) $(2x+3)^2=2(x+1)^2$; g) $(x+2)^2-2x-4=-1$; h) $4x^2+2x+\dfrac{1}{4}=0$;

i) $49-28x+4x^2+(7-2x)(5-3x)=0$; j) $(x+1)^2+(x-1)^2=4$.

Exercice 7 : Résoudre les équations suivantes : a) $(3x+2)-4+9x^2=0$; b) $3(x+2)+2(x+2)^2=0$; c) $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x^2-4}$; d) $\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{1}{x-3}=0$; e) $x^4=16$;

f) $(2x+1)^2-3x-\dfrac{3}{2}=0$; g) $(3x-2)^2-(x+1)(2-3x)+\dfrac{9}{2}x^2-6x+2=0$;

h) $x^8+2x^4+1=0$; i) $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x=0$; j) $(3x-1)^2+5x^2=(2x+1)^2$.

Exercice 8:

a) $-7+x\leq 9$ b) $-2x+3\geq 2x-1$ c) $\dfrac{1}{x-1}=x-1$

d) $|2x-3|+|1-2x|=2$ e) $|x-1|+2|1-x|=-x^2$ f) $1\leq |x-4|<3$

g) $\sqrt{x^2-4x+4}>0$ h) $(2x-3)^2-4x^2+9=2x-3$

i) $\dfrac{2x-1}{7-x}\geq 1$ j) $\left|\dfrac{1-x}{x-6}\right|<1$

Exercice 9 : **Pie XII** (1876-1958) élu pape en 1939 pour succéder à Pie XI qui l'avait désigné. Très critiqué pour sa neutralité et son silence durant la seconde guerre mondiale, il reste l'un des papes majeurs de par sa longévité et les 41 encycliques qu'il a publiées.

a) $12+x=\pi$

b) $-x-12=\pi$

c) $\frac{\pi}{12}x+12=\pi$

d) $12x=\pi$

e) $\frac{12}{x}=\pi$

f) $\frac{x-12}{\pi}=0$

g) $\frac{\pi}{12}x+\frac{12}{\pi}=0$

h) $12x-\pi=12x-\pi$

i) $12\left[(x-\pi)^2-\pi^2\right]=0$

j) $\frac{12}{x}=\frac{\pi}{x}$

k) $\frac{x}{12}=\frac{x}{\pi}$

l) $\frac{\pi x}{12}=0$

m) $\frac{12-x}{12-x}=\frac{\pi}{\pi}$

n) $\frac{x+12}{x-\pi}=0$

o) $\frac{12}{\pi x}=0$

p) $(x-\pi)^2=12$

q) $(x+12)^2=-\pi$

r) $\frac{x^2-\pi^2}{x-\pi}\times 12=12$

s) $\frac{x^2-2\pi x+\pi^2}{x-\pi}\times 12=0$

t) $x^2=144+24\pi+\pi^2$

Exercice 10 :

106 *Revenons en Europe avec ce problème de Nicolas Chuquet (1484) dont les préoccupations apparaissent ici très commerciales.*

Un marchand fait trois foires.
À la première, il double son argent et dépense 30 francs.
À la seconde, il triple son argent et dépense 54 francs.
À la troisième, il quadruple son argent et dépense 72 francs.
Il lui reste alors 48 francs.
Combien d'argent avait-il au départ ?

Exercice 11 :

105 ***L'épitaphe de Diophante (traduction versifiée)***

Passant, sous ce tombeau repose Diophante.
Ces quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort.
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance ;
Le douzième fut pris par son adolescence
Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula.
Cinq ans après un fils qui, du destin sévère,
Reçut de jours hélas ! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
Dis si tu sais compter, à quel âge il mourut.

Annales 2013-2014

Exercice 1: a) $2(x-1)-7x+7=0$ b) $3(1-2x)^2=(x+1)^2$ c) $\frac{1}{x-2}-\frac{x}{x^2-2}=0$

d) $(2x-4)^2+1=2(2x-4)$ e) $2x^2+4x+4=0$

Exercice 2: a) $(x-3)^2+4=-4(x-3)$ b) $3(x+1)^2=9x^2-6x+1$ c) $\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x-1}=0$

d) $(x-5)(2-x)\leq 0$ e) $\frac{x^2}{x+1}+\frac{2x}{x+1}=\frac{-1}{x+1}$

SOLUTIONS ANNALES :

[*Exercice 1* : $S_a=\{1\}$, $S_b=\left\{\dfrac{7-3\sqrt{3}}{11};\dfrac{7+3\sqrt{3}}{11}\right\}$, $S_c=\{1\}$, $S_d=\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$, $S_e=\varnothing$.

Exercice 2: $S_a=\{1\}$, $S_b=\left\{\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3};\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right\}$, $S_c=\{0\}$, $S_d=]-\infty;2]\cup[5;+\infty[$, $S_e=\varnothing$.

Détails :

a)

$$(x-3)^2+4(x-3)+4=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+2\times2\times(x-3)+2^2=0 \Leftrightarrow \left[(x-3)+2\right]^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

b)

$$3(x+1)^2=9x^2-6x+1 \Leftrightarrow 3(x+1)^2=(3x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\sqrt{3}(x+1)\right]^2-(3x-1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{3}(x+1)-(3x-1)\right]\times\left[\sqrt{3}(x+1)+(3x-1)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[(\sqrt{3}-3)x+(\sqrt{3}+1)\right]\times\left[(\sqrt{3}+3)x+(\sqrt{3}-1)\right]=0$$

Donc

$$(\sqrt{3}-3)x+(\sqrt{3}+1)=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}-3)x=-(\sqrt{3}+1) \Leftrightarrow x=\frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-3}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-3}\times\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+3} \Leftrightarrow x=\frac{-3-3\sqrt{3}-\sqrt{3}-3}{3-9} \Leftrightarrow x=\frac{-6-4\sqrt{3}}{-6}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

Et de même,

$$(\sqrt{3}+3)x+(\sqrt{3}-1)=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}+3)x=-(\sqrt{3}-1) \Leftrightarrow x=\frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3}\times\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3} \Leftrightarrow x=\frac{-3+3\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}{3-9} \Leftrightarrow x=\frac{-6+4\sqrt{3}}{-6}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$$

c)

$$\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)-x(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0 \Leftrightarrow \frac{x\left[(x-1)-(x-2)\right]}{(x-2)(x-1)}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{(x-2)(x-1)}=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{et} \quad (x-2)(x-1)\neq0$$

Donc x doit être nul et différent de 1 et 2. Ainsi, x=0.

d) Faire un tableau de signe.

e) $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{-1}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{x+1}=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \quad \text{et} \quad x+1\neq0$

Donc pas de solution.

SOLUTIONS

Exercice 1 : $S_a=\mathbb{R}$, $S_b=\left\{\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $S_c=]3;4[$, $S_d=\{1\}$, $S_e=]-\infty;1[\cup[3;+\infty[$,

Exercice 2 : $S_a=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $S_b=\varnothing$, $S_c=]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$, $S_d=]-1;0]\cup[8;9[$, $S_e=\{0\}$,

Exercice 3 : $S_a=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$, $S_b=\{1\}$, $S_c=\{0\}$, $S_d=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, $S_e=\{-2\}$, $S_f=\{-1\}$, $S_g=\{2\}$,

$S_h=\{1\}$, $S_i=\{3\}$, $S_j=\{0\}$, $S_k=\{2\}$, $S_l=\{10\}$, $S_m=\{2\}$, $S_n=\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$, $S_o=\varnothing$, $S_p=\left\{\dfrac{15}{2}\right\}$,

$S_q=\{0\}$, $S_r=\left\{\dfrac{-3}{2}\right\}$, $S_s=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, $S_t=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, $S_u=\{1\}$, $S_v=\{6\}$

Exercice 4 : $S_a=\left\{\dfrac{-1}{3},\dfrac{2}{3}\right\}$, $S_a=\left\{\dfrac{-1}{2},\dfrac{2}{3}\right\}$, $S_c=\left\{-3,\dfrac{-1}{5}\right\}$, $S_d=\left\{-7,\dfrac{3}{5}\right\}$,

$S_e=\left\{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}},\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right\}=\left\{\dfrac{-8-3\sqrt{6}}{10},\dfrac{-8+3\sqrt{6}}{10}\right\}$, $S_f=\left\{\dfrac{-3}{4},\dfrac{-3}{8}\right\}$, $S_g=\{-3,-2\}$,

$S_h=\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$, $S_i=\{-3\}$, $S_j=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

Exercice 5 : $S_a=\{-5,5\}$, $S_a=\left\{\dfrac{-5}{2},\dfrac{5}{2}\right\}$, $S_c=\{0\}$, $S_d=\varnothing$, $S_e=\left\{\dfrac{-9}{5},\dfrac{9}{5}\right\}$, $S_f=\varnothing$, $S_g=\varnothing$,

$S_h=\left\{\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2},\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}$, $S_i=\{-2\}$, $S_j=\{-5,-3\}$

Exercice 6 : $S_a=\{-2,0\}$, $S_a=\left\{\dfrac{-2}{5},1\right\}$, $S_c=\left\{\dfrac{9}{2}\right\}$, $S_d=\{-1,4\}$, $S_e=\left\{\dfrac{-11}{3},\dfrac{11}{3}\right\}$,

$S_f=\left\{\dfrac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},\dfrac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right\}=\left\{\dfrac{-4-\sqrt{2}}{2},\dfrac{-4+\sqrt{2}}{2}\right\}$, $S_g=\{-1\}$, $S_h=\left\{\dfrac{-1}{4}\right\}$, $S_i=\left\{\dfrac{7}{2},\dfrac{12}{5}\right\}$,

$S_j=\{-1,1\}$

Exercice 7 : $S_a=\left\{\dfrac{-2}{3},\dfrac{1}{3}\right\}$, $S_a=\left\{\dfrac{-7}{2},-2\right\}$, $S_c=\{3\}$, $S_d=\left\{\dfrac{7}{4}\right\}$, $S_e=\{-2,2\}$, $S_f=\left\{\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{4}\right\}$,

$S_g=\left\{\dfrac{4}{11},\dfrac{2}{3}\right\}$, $S_h=\varnothing$, $S_i=\{0,1\}$, $S_j=\{0,1\}$]

Exercice 8 : $S_a=]-\infty;16]$; $S_b=]-\infty;1]$; $S_c=\{0;2\}$; $S_d=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$; $S_e=\varnothing$;

$S_f=]1;3]\cup[5;7[$; $S_g=\mathbb{R}\setminus\{2\}$; $S_h=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$; $S_i=\left[\dfrac{8}{3};7\right[$; $S_j=\left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right[$

Exercice 9 : **Pie XII** (1876-1958) élu pape en 1939 pour succéder à Pie XI qui l'avait désigné. Très critiqué pour sa neutralité et son silence durant la seconde guerre mondiale, il reste l'un des papes majeurs de par sa longévité et les 41 encycliques qu'il a publiées.

a) $x=\pi-12$
b) $x=-\pi-12$
c) $x=12\dfrac{\pi-12}{\pi}$

l) $x=0$
m) $S=\mathbb{R}\setminus\{12\}$
n) $x=-12$
o) $S=\varnothing$
p) $(x-\pi)^2=12$

d) $x = \dfrac{\pi}{12}$

e) $x = \dfrac{12}{\pi}$

f) $x = 0$

g) $x = \dfrac{-144}{\pi^2}$

h) $S = \mathbb{R}$

i) $S = \{0, 2\pi\}$

j) $S = \varnothing$

k) $x = 0$

q) $(x+12)^2 = -\pi$

r) $x = 1-\pi$

s) $S = \varnothing$

t) $S = \{-12-\pi; 12+\pi\}$

Exercice 10 : On doit résoudre 4(3(2*x*-30)-54)-72=48. Donc *x*=29.

Exercice 11 : 84 ans.

Les 13 Irréductibles !!

1. $4x^2-4x+1=0$	6. $3x^2+2\sqrt{3}x+1<0$	11. $\|2-6x\|>5$
2. $(2x-1)^2=-3$	7. $5x+1>x^2+3x+2$	12. $\|1-x\|<-1$
3. $(2x+1)(2-x)=4x^2-1$	8. $\|x^2-25\|=0$	13. $\dfrac{\|6x-3\|}{\|2-x\|}>2$
4. $2-3x<0$	9. $\|x-7\|=3$	
5. $(2x+1)(1-3x)\geqslant 0$	10. $\|x-9\|=\|8-x\|$	

1. $(2x-1)^2=0$, d'où $2x-1=0$ et $S=\{\frac{1}{2}\}$.

2. Un carré étant toujours positif, $S=\varnothing$.

3. $(2x+1)(2-x)=4x^2-1 \Leftrightarrow (2x+1)(2-x)=(2x-1)(2x+1)$
$\Leftrightarrow (2x+1)(2-x)-(2x+1)(2x-1)=0$
$\Leftrightarrow (2x+1)((2-x)-(2x-1))=0$
$\Leftrightarrow (2x+1)(3-3x)=0$ d'où
$S=\{\frac{-1}{2} ; 1\}$.

4. $x>\frac{2}{3}$ donc $S=]\frac{2}{3};+\infty[$.

5. Tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-3x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(2x+1)(1-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $S=[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{3}]$.

6. $(\sqrt{3}x+1)^2<0$ un carré étant toujours positif, il n'y a pas de solution. $S=\varnothing$

7. $0>x^2-2x+1 \Leftrightarrow 0>(x-1)^2$ Un carré étant toujours positif, il n'y a pas de solution $S=\varnothing$.

8. $|(x-5)(x+5)|=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5)=0$
car $|y|=0 \Leftrightarrow y=0$ (propriété 2.I)
Donc $S=\{-5 ;5\}$.

9. Si $x-7\geqslant 0$ alors $|x-7|=x-7=3 \Leftrightarrow x=10$.
Si $x-7\leqslant 0$ alors $|x-7|= -(x-7)=3 \Leftrightarrow x= 4$.
Donc $S=\{4 ;10\}$.

10. $|x-9|=|8-x| \Leftrightarrow x-9=8-x$ ou $x-9= -(8-x)$
$\Leftrightarrow 2x=17$ ou pas de solution.
Donc $S=\{\frac{17}{2}\}$ (propriété 2.I)

11. Si $2-6x\geqslant 0$ alors $|2-6x|=2-6x>5 \Leftrightarrow x<\frac{-1}{2}$
Si $2-6x\leqslant 0$ alors $|2-6x|=6x-2>5 \Leftrightarrow x>\frac{7}{6}$
D'où $S=]-\infty ;\frac{-1}{2}[$ 4 $]\frac{7}{6};+\infty[$.

12. Une valeur absolue étant toujours positive, il n'y a pas de solution. Ainsi, $S=\varnothing$.

13. On a le tableau de valeur suivant qui nous amène à considérer trois intervalles :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\|6x-3\|$		$3-6x$	0	$6x-3$	|	$6x-3$	
$\|2-x\|$		$2-x$	|	$2-x$	0	$x-2$	
$\dfrac{\|6x-3\|}{\|2-x\|}$		$\dfrac{3-6x}{2-x}$	0	$\dfrac{6x-3}{2-x}$	||	$\dfrac{6x-3}{x-2}$	

a) Si $\boxed{x\leqslant\frac{1}{2}}$ alors on doit résoudre $\frac{3-6x}{2-x}>2 \Leftrightarrow 3-6x>2(2-x) \Leftrightarrow x<\frac{-1}{4}$ donc $S_a=]-\infty ; \frac{-1}{4}[$.

Il est à noter que nous avons multiplier par $(2-x)$ une inéquation sans en changer le sens car ce terme est strictement positif.

b) Si $\boxed{\frac{1}{2}\leqslant x<2}$ alors on a $\frac{6x-3}{2-x}>2 \Leftrightarrow 6x-3>2(2-x) \Leftrightarrow x>\frac{7}{8}$ donc $S_b=]\frac{7}{8} ;2[$.

c) Si $\boxed{2<x}$ on doit résoudre $\frac{6x-3}{x-2}>2 \Leftrightarrow 6x-3>2(x-2) \Leftrightarrow x>\frac{-1}{4}$ et on a $S_c=]2 ;+\infty[$

En conclusion, $S= S_a$ 4 S_b 4 $S_c=]-\infty ; \frac{-1}{4}[$ 4 $]\frac{7}{8} ;2[$ 4 $]2 ;+\infty[$