Exercice 1 : Comparer $1+\sqrt{7}$ et $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$.

Exercice 2 : Soit x un nombre réel strictement positif.

On note $A = x + \dfrac{1}{x}$ et $B = 2$.

Comparer A et B.

Exercice 3 : Soient m et p deux nombres réels strictement positifs tels que : $m < p$.

1. Comparer $\dfrac{1}{m+3}$ et $\dfrac{1}{p+3}$.

2. Comparer $\sqrt{\dfrac{m+1}{5}}$ et $\sqrt{\dfrac{p+1}{5}}$.

Exercice 4 : b est un réel tel que : $2 < b < 3$

1. Donner un encadrement de $\dfrac{2-b^2}{5}$.

2. On se donne de plus le réel a tel que : $1 < a < 2$.
Donner un encadrement de $b - 2a$.

Exercice 5 : Ranger les nombres a, a^2, a^3 dans l'ordre croissant dans les deux cas suivants :

1. $a = \sqrt{2} - 1$

2. $a = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

Exercice 6 : Comparer les nombres suivants :

a) $\sqrt{5} - 2$ et $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{5} - 3$ et $\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}$

c) $2\sqrt{5} - 5$ et $\sqrt{45 - 20\sqrt{5}}$

En déduire une écriture simple de $\sqrt{45 - 20\sqrt{5}}$.

Exercice 7 : A est un nombre strictement négatif. Comparer dans chaque cas a et b.

1. $a = \dfrac{5A}{12}$ et $b = \dfrac{3A}{8}$ 2. $a = \dfrac{5}{12} - A$ et $b = \dfrac{3}{8} - A$

3. $a = \dfrac{2}{3A}$ et $b = \dfrac{5}{6A}$

Exercice 8 : Dans chaque cas, a et b sont deux réels strictement positifs. Comparer A et B en étudiant le signe de A – B.

1. $A = ab + 1$ et $B = (a+1)(b+1)$
2. $A = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ et $B = 2$.

Exercice 9 : x désigne un nombre réel tel que $x \geq 2$.

$A = (x-1)^2$ et $B = (x-2)^2$.

a) Factoriser la différence A – B.

b) En déduire le signe de A – B et comparer alors A et B.

Exercice 10 : Soient a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

<u>Exercice 11</u>: Ranger dans l'ordre croissant a, a^2 et a^3

pour $a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ et pour $a = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}$.

<u>Exercice 12</u> : x désigne un nombre réel tel que $0 < x < 1$.
Comparer les nombres $(1 - x)$ et $(1 - x)^3$.

<u>Exercice 13</u> : Soit x un réel vérifiant $x > 2$.

Préciser dans quels intervalles se trouvent : $\dfrac{1}{x}$; x^2 ; $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; $\dfrac{1}{x-2}$

SOLUTIONS :

Exercice 1 : Il suffit d'élever au carré pour se rendre compte qu'il s'agit du même nombre. On a le droit de la faire car ils sont tous les deux positifs !!

Exercice 2 : Pour comparer deux nombres, on étudie le signe de leur différence :

On a $x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$ qui est positif car x est positif.

Exercice 3 : Soient m et p deux nombres réels strictement positifs tels que : $m < p$.

1. On a $0<m+3<p+3$ et par passage à l'inverse, $\frac{1}{m+3}>\frac{1}{p+3}$.

2. Idem avec en plus une racine carrée et on trouve : $\sqrt{\frac{m+1}{5}} < \sqrt{\frac{p+1}{5}}$.

Exercice 4 : b est un réel tel que : $2 < b < 3$

1. En élevant au carré, on trouve $4<b^2<9$ car tout est positif et $-9<-b^2<-4$, d'où $\frac{-7}{5}<\frac{2-b^2}{5}<\frac{-2}{5}$.

2. On a de même $-4<-2a<-2$ et en additionnant membre à membre avec l'inégalité sur b, on trouve $-2<b-2a<1$

Exercice 5 : Ranger les nombres a, a^2, a^3 dans l'ordre croissant dans les deux cas suivants :

1. Si $a<1$, alors $a^3<a^2<a$, ce qui est le cas avec $a=\sqrt{2}-1$

2. Si $a>1$, alors $a^3>a^2>a$, ce qui est le cas ici.

Exercice 6 : En faisant attention à bien vérifier les signes avant d'élever au carré, on trouve :

a) $\sqrt{5}-2 = \sqrt{9-4\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{5}-3 < \sqrt{15-6\sqrt{5}}$

c) $2\sqrt{5}-5 < \sqrt{45-20\sqrt{5}}$ car le premier est négatif !!

On en déduit que $\sqrt{45-20\sqrt{5}} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}-5\right)^2} = \left|2\sqrt{5}-5\right| = 5-2\sqrt{5}$.

Exercice 7 :

1. $a=\frac{5A}{12} < b=\frac{3A}{8}$ 2. $a=\frac{5}{12}-A > b=\frac{3}{8}-A$

3. $a=\frac{2}{3A} > b=\frac{5}{6A}$

Exercice 8 :

1. En calculant $A-B=(ab+1)-(a+1)(b+1)=ab+1-ab-a-b-1=-a-b<0$ (on est obligé de développer – c'est mal !) Donc $A<B$

2. On calcule là aussi $A-B=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}>0$. Donc $A>B$.

Exercice 9 : x désigne un nombre réel tel que $x \geq 2$.

$A = (x-1)^2$ et $B = (x-2)^2$.

a) On a $A-B=(x-1+x-2)(x-1-(x-2))=(2x-3)(1)=2x-3$.

b) Donc $A-B>0$ si $x>3/2$ et inférieur à 0 sinon.

Exercice 10 : Tout est positif, on peut don élever au carré :

$\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a+b}^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a+b<a+b+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 0<2\sqrt{ab}$

La dernière inégalité est vraie, donc la première aussi (on a raisonné par équivalence)

Exercice 11: Même propriété qu'à l'exercice 5 :

On a $a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}<1$, donc $a^3<a^2<a$.

Et si $a = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+1}}$, on a clairement a>1, donc $a^3 > a^2 > a$.

<u>Exercice 12 :</u> De même, si $0 < x < 1$, alors $0 < 1 - x < 1$ et $(1 - x) > (1 - x)^3$.

<u>Exercice 13 :</u> On trouve $\dfrac{1}{x} \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $x^2 \in \left]4, +\infty\right[$, $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \in \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$ et $\dfrac{1}{x-2} \in \left]0, +\infty\right[$