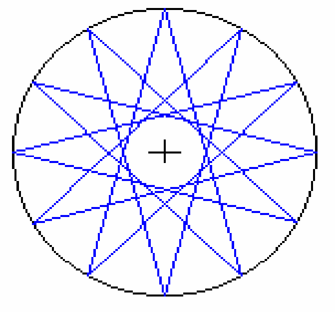
*Exercice : Dans quel sens faut-il plier une feuille de papier A4 pour obtenir un cylindre de volume maximal ? Quel est ce volume ?

Exercice : La France a une surface de 550 000 km^2 . Elle est souvent comparée à un hexagone. Quel serait le rayon du cercle contenant la France si elle avait la forme d'un hexagone régulier.

Exercice : Saurez-vous trouver combien il existe de dodécagones réguliers croisés ?



Exercice : L'étameur vient juste de terminer une bouilloire à fond plat de 18cm de profondeur et qui contient exactement 25l d'eau. Pouvez-vous donner (au dixième de centimètre près) le diamètre du bord de la bouilloire, sachant que c'est le double du diamètre du fond ?

Exercice : Dans un verre conique, on verse successivement du mercure (densité 13,59), de l'eau (densité 1) et de l'huile (densité 0,915). Les trois liquides remplissent le verre sans se mélanger en y formant trois couches d'égale épaisseur. Le verre contient-il alors une masse plus importante d'eau, d'huile ou de mercure ? (masse=densité×volume)

Exercice : 1. Montrer que la hauteur d'un tétraèdre régulier d'arête a est calculée par $h=a\sqrt{\frac{2}{3}}$

2. Application : Quatre sphères de rayon 10cm sont empilées de telle sorte que leur centre soit un sommet du tétraèdre. Calculer la hauteur de l'empilement.

Exercice : Une balle flottait sur un lac lorsque celui-ci gela. Sans rompre la glace, on a ôté la balle, qui a laissé un trou de 24cm de diamètre et de 8cm de profondeur. Quel est le rayon de la balle ?

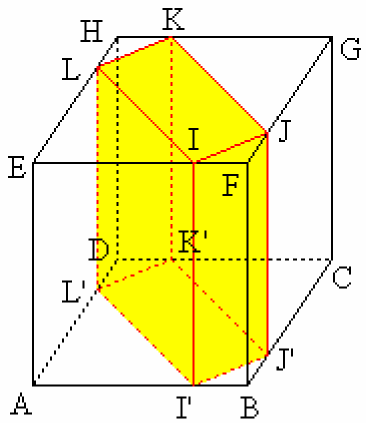
Exercice : La carré du Prince Rupert (résultat attribué à Pieter Nieuwland)

1. On considère un carré EFGH de côté 1 et on place les points I, J, K et L respectivement sur les côtés [EF], [FG], [GH] et [HE] tels que :

$$EI=EL=GJ=GK=\frac{3}{4}$$

Illustrer ces données par un dessin et montrer que IJKL est un rectangle.

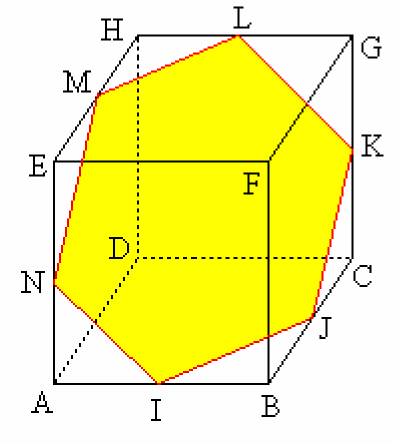
2. Comme l'illustre la figure ci-contre, la construction précédente a été effectuée sur la face supérieure d'un cube d'arête 1 : les points I', J', K' et L' sont alors projetés orthogonaux de I, J, K et L sur la face ABCD.
   a) Quelle est la nature du solide IJKLI'J'K'L' ?
   b) Montrer que JKL'I' est un rectangle.



c) Calculer I'J et JK et en déduire que JKL'I' est en fait un carré.

Le carré précédent a pour côté $\frac{3}{4}\sqrt{2}$=1,0607… il est donc plus grand qu'une face du cube.

C'est le plus grand carré que l'on peut inscrire dans le cube.



Exercice : Dans la figure ci-contre, les points I, J, K L, M et N sont les milieux des arêtes du cube :

1. Montrer que chacun de ces six points est à égale distance de D et de F. En déduire qu'ils sont situés dans le même plan orthogonal à (DF).
2. Soit O le milieu de [DF] (le point O est donc le centre du cube). Montrer que les triangles OIJ, OJK, OKL, OLM, OMN et ONI sont équilatéraux.
3. En déduire la nature de IJKLMN.

Exercice : Montrer que le polyèdre ayant pour sommet les centres des faces d'un cube est un octaèdre régulier.

Exercice : Dessinez un carré de 8cm de côté en perspective cavalière avec un angle de 45° (donner les calculs)
Tracer un cercle…

Exercice : On considère un tétraèdre ABCD et I,J et K les milieux des côtés issus de A
1. Faire une figure.
2. Montrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.
3.

Exercice : : On considère un tétraèdre ABCD et I,J et K les centres de gravité respectifs des faces ABC, ACD et ADB.
1. Faire une figure.
2. Montrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.

Exercice : : On considère un tétraèdre ABCD et I,J,K et L les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC], [CD] et [DA].
1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire du quadrilatère IJKL ?
3. A quelle condition est-ce un losange ?
4. Soit M le milieu de [IK], construire le point d'intersection de (BK) et du plan (ACD).

Exercice : On considère une pyramide de référence SABCD, les points I et J, milieux respectifs des arêtes [SA] et [SC] et un point K de l'arête [SB].
1. Faire une figure sans placer K.
2. a. Montrer que si la droite (IK) est parallèle à la droite (AB), alors les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

b. Montrer que si la droite (IK) n'est pas parallèle à la droite (AB), alors les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

3. Le plan (IJK) coupe l'arête [SD] en un point L. Construire L après avoir placé K :
   a. Si la droite (IK) est parallèle à la droite (AB).
   b. Si la droite (IK) n'est pas parallèle à la droite (AB).

Exercice : On considère un cube de référence ABCDEFGH, le point I, centre de la face EFGH et le point O, centre du cube.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les droites (BI) et (DF) sont sécantes ; on note J leur point commun.
3. Que représente J pour les triangles BFH et BEG ?

Exercice : On considère un tétraèdre ABCD et les points I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB],[BC],[CD],[DA],[BD] et [AC].

1. Faire une (grande) figure.
2. Montrer que IJKL est un quadrilatère.
3. Montrer que IJKL est un parallélogramme.
4. On appelle bimédiane du tétraèdre les segments joignant les deux milieux de deux arêtes opposées (comme [AB] et [CD] par exemple). Nommer toutes le bimédianes du tétraèdre ABCD.
5. Démontrer que ces bimédianes sont concourantes en leur milieu.
6. Construire G et H les centres de gravité respectifs des faces ABC et ACD.
7. Montrer que la droite (GH) est parallèle au plan (BCD).
8. Tracer, en justifiant la méthode, le point E commun à la droite (LG) et au plan (BCD) ainsi que le point F commun à la droite (IH) et au plan (BCD).
9. Montrer que le symétrique E' de D par rapport à J appartient à (GL) ; en déduire que E'=E.
10. Que peut-on dire des quadrilatères BDCE et BDFC ?
11. Qu'en déduire pour les points E, C et F ?

Exercice : On considère un cube de référence ABCDEFGH et les points I, J, K et L définis par : I et J sont les milieux respectifs des arêtes [BF] et [FG]. K est le point d'intersection des droites (AI) et (EB). L est le point d'intersection des droites (JH) et (EG).

1. a. Faire une figure.
   b. Montrer que les droites (IJ) et (AH) sont parallèles.
   c. Montrer que les droites (AI) et (HJ) sont coplanaires. On appelle $\mathscr{P}$ le plan que ces droites déterminent.
   d. Montrer que le point commun à (AI) et (HJ) appartient à (EF).
2. a. Tracer, en justifiant la méthode, la droite *d* commune aux plans $\mathscr{P}$ et (ABC) et la droite *d*' commune aux plans (BEG) et (ABC).
   b. On appelle M le point d'intersection des droites *d* et *d*'. Montrer que les points K, L et M sont alignés.

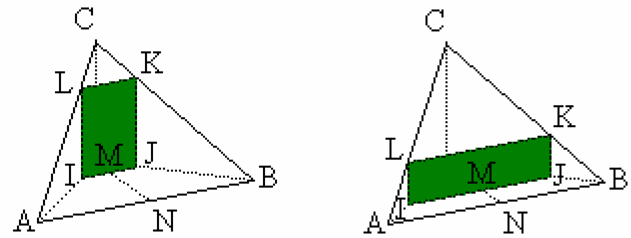
Exercice : On considère un tétraèdre régulier ABCD, les points I (de [AB]) et J (de [AD]), tels que AI=$\frac{1}{3}$AB et AJ=$\frac{1}{3}$AD et les points K et L, milieux respectifs des arêtes [CD] et [CB].

1. Faire une figure.
2. a. Montrer que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.
   b. Montrer que les droites (IL) et (JK) sont sécantes.
3. a. Montrer que la droite (AC) coupe le plan (IJK). On appelle O leur point commun.

b. Montrer que les droites (IL), (JK) et (AC) se coupent en O.

4. a. Que représente le point I pour le triangle OBC ?
   b. En déduire que les points O, B, C et D appartiennent à une même sphère de centre A.
5. Montrer que (AB) et (CD) sont orthogonales.

Exercice :



OABC est un tétraèdre dont les arêtes issues de O sont deux à deux perpendiculaires. On donne OA=OB=OC=2. Le point N est le milieu de [AB] et M est un point variable du segment [ON]. La parallèle à (AB) passant par M coupe (OA) en I et (OB) en J. Les parallèles à (OC) passant par I et J coupent (CA) et (CB) respectivement en L et K.

1. Nature du quadrilatère IJKL :
   a. Montrer que les droites (LK) et (IJ) sont parallèles.
   b. Montrer que les droites (IL) et (IJ) sont perpendiculaires.
   c. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL.
2. Calcul de l'aire du quadrilatère IJKL :
   a. On note OM=x avec $x \in [0\,;\sqrt{2}]$ et on appelle A(x) l'aire du quadrilatère IJKL. Montrer que IJ=2x puis que JK=$2-x\sqrt{2}$.
   b. En déduire l'expression de A(x).
3. Etude de cette aire.
   a. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction A.
   b. Pour quelle position de M sur [ON] cette aire semble-t-elle maximale ?
   c. Démontrer cette conjecture par le calcul. On pourra utiliser le développement de l'expression : $(x\sqrt{2}-1)^2$.

Problème :

I Les rectangles d'or.

Considérons deux rectangles de l'espace, de mêmes dimensions (l et L avec $l \leqslant L$) et de même centre O tels que :

- le grand axe de symétrie de EFGH soit perpendiculaire au plan ABCD.
- le petit axe de EFGH et le grand axe de ABCD soient confondus.

On veut déterminer la forme des rectangles pour lesquels on a AH=AD.

a. On appelle P le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC). Montrer que $AP^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{L-l}{2}\right)$ (utiliser le triangle APQ).

b. Montrer que le triangle APH est rectangle en P. En déduire que $AH^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{L-l}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2$.

c. Montrer que AH=AD équivaut à $L^2-lL-l^2=0$ ou encore, en posant $\frac{L}{l}$=R que $R^2-R-1=0$.

d. Montrer que le célèbre nombre d'or, qui vaut $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution de l'équation en R du c.
e. On admet que c'est la seule qui soit positive. Donner une valeur approchée de φ.
f. Refaire la figure et la compléter par un troisième rectangle d'or de même centre O et orthogonal aux deux premiers (de telle sorte que les petits axe deviennent les grand et réciproquement). Joindre les sommets des rectangles et étudier le polyèdre obtenu.

DESSIN p333 +scan p334

QCM :

DESSIN p.336

1. Les droites (EB) et (HC) sont parallèles.
2. Les droites (EG) et (HC) sont sécantes.
3. Les droites (BE) et (IH) sont parallèles.
4. Les droites (AI) et (CG) sont sécantes.
5. Les droites (AI) et (BG) sont coplanaires.
6. Les plans (ACH) et (BEG) sont parallèles.
7. Les plans (ADC) et (BEG) sont sécants.
8. Les droites (AI) et (HF) sont orthogonales.
9. Les droites (AI) et (BD) sont orthogonales.
10. La droite (AI) est orthogonale au plan (BDH).
11. Les droites (EB) et (BG) sont orthogonales.
12. La droite (AF) est orthogonale au plan (BCE).
13. PLUS GENERALEMENT : Trois points déterminent toujours un plan.
14. Deux droites parallèles sont toujours coplanaires.
15. Deux droites parallèles déterminent toujours un plan.
16. Deux droites sécantes sont toujours coplanaires.
17. Deux droites sécantes déterminent toujours un plan.
18. Deux droites sont sécantes ou parallèles.
19. Deux plans sont sécants ou parallèles.
20. Une droite est toujours sécante ou parallèle à un plan donné.
21. Si les droites *d* et *d*' sont sécantes, ainsi que *d'* et *d''* alors, *d*, *d'* et *d''* sont coplanaires.
22. Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles.
23. Si une droite est parallèle à deux plans, ces plans sont parallèles.
24. Un prisme ayant même base et même hauteur qu'une pyramide a un volume trois fois plus grand.
25. Si on multiplie la hauteur d'un cône par 2 sans changer sa base, alors son volume est multiplié par 2.
26. Un cube a un volume triple de celui du tétraèdre dont les arêtes sont de même longueur.