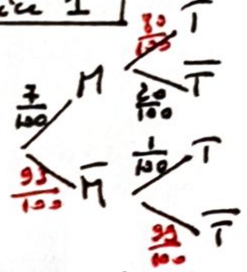
Bac Blanc n°1 – 24 janvier 2023.

Exercice 1

1°)



données complétées par la loi des noeuds.

2°) a) On cherche $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = \frac{7}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{28}{500} = \boxed{\frac{7}{125}}$

b) On utilise la <u>formule des probabilités totales</u> avec le <u>système complet d'évènements</u> $(M, \overline{M})$

$$p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T) = \frac{7}{125} + \frac{93}{100} \times \frac{1}{100} = \boxed{\frac{653}{10000}} = \underline{0{,}0653}.$$

3°) On cherche $p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \boxed{\dfrac{560}{653}} \simeq \underline{0{,}86}$

4°) a) L'expérience aléatoire est la répétition de $n = 10$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même probabilité de "succès" $p = p(T)$.
Ainsi, X suit une <u>loi binomiale</u> $\mathcal{B}(10\,;\,0{,}0653)$

b) On cherche

$$P(X=2) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 \simeq \underline{0{,}11}$$

5°) a) Sur n personnes, on a Y le nombre de personnes ayant un test positif qui suit $\mathcal{B}(n, p)$. On cherche donc n tel que

$$\begin{aligned}
p(Y \geq 1) \geq 0{,}99 &\iff 1 - p(Y=0) \geq 0{,}99 \\
&\iff 1 - (1-p)^n \geq 0{,}99 \\
&\iff 0{,}01 \geq (1-p)^n \\
&\iff \ln(0{,}01) \geq n \ln(1-p) \quad \text{car } \ln \text{ croissant sur }]0;+\infty[\\
&\iff \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(1-p)} \leq n \quad \text{car } \ln(1-p) < 0
\end{aligned}$$

or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln(1-p)} \simeq 68{,}2$ Donc $n \geq \boxed{69}$

b)

```
n = 1
while 0.01 < (1 - 0,0653)**n :
    n = n+1
print (n)
```

Exercice 2 $\quad D(0,1,0) \quad C(1,1,0) \quad A(0,0,0)$

1°) K est le milieu de $[DC]$, donc $K\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ et $\boxed{\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix}}$

$\boxed{\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}}$

2°) a) On calcule $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AK} = 6\times\frac{1}{2} - 3\times 1 + 2\times 0 = 0$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AL} = 6\times 0 - 3\times 1 + 2\times\frac{3}{2} = 0$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à <u>deux droites sécantes</u> de (AKL)

Ainsi $\vec{n} \perp (AKL)$.

b) $M(x,y,z) \in (AKL) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

$$\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \boxed{6x - 3y + 2z = 0}$$

c) $M(x,y,z) \in \Delta \iff \overrightarrow{DM} = t\vec{n} \quad t \in \mathbb{R}$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x - 0 = 6t \\ y - 1 = -3t \\ z - 0 = 2t \end{cases}}$$

d) Il suffit de vérifier que $N \in \Delta \cap (AKL)$

- $N \in (AKL)$ car $6\times\frac{18}{49} - 3\times\frac{40}{49} + 2\times\frac{6}{49} = 0$
- $N \in \Delta$ car $\begin{cases} \frac{18}{49} = 6t \\ \frac{40}{49} = -3t + 1 \\ \frac{6}{49} = 2t \end{cases}$ a pour solution $t = \frac{3}{49}$

3°) a) $$V = \frac{\mathcal{A}(ADK)\times DL}{3} = \frac{\frac{AD\times KD}{2}\times DL}{3} = \frac{\frac{1\times\frac{1}{2}}{2}\times\frac{3}{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{8}} \text{ u.v.}$$

b) D'après la formule du cours,

$$d(D,(AKL)) = \frac{|6\times 0 - 3\times 1 + 2\times 0|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

c) En prenant pour base le triangle AKL, on trouve

$$V = \frac{\mathcal{A}(AKL)\times d(D,(AKL))}{3} = \frac{\mathcal{A}(AKL)}{3}\times\frac{3}{7}$$

Donc $\frac{1}{8} = \frac{\mathcal{A}(AKL)}{7} \iff \mathcal{A}(AKL) = \boxed{\frac{7}{8}}$ u.a.

Exercice 3

Partie A

1°) $a_1 = \frac{85}{100} \times a_0 + 450 = \boxed{620}$

2°) Au mois $n+1$, on a conservé 85% de ceux du mois n, soit $0,85 a_n$ auquel on ajoute les 450 nouveaux. Ainsi $\underline{a_{n+1} = 0,85 a_n + 450}$

3°) a) $v_{n+1} = a_{n+1} - 3000 = 0,85 a_n + 450 - 3000 = 0,85 a_n - 2550$

$= 0,85 (a_n - 3000) = 0,85 v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = -2800$.

b) $v_n = (0,85)^n v_0 = \underline{-2800 \times 0,85^n}$

c) Ainsi $a_n = v_n + 3000 = \underline{-2800 \times 0,85^n + 3000}$

4°) On cherche à résoudre

$a_n > 2500 \iff -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500$

$\iff 0,85^n < \frac{500}{2800}$

$\iff n \ln 0,85 < \ln \frac{5}{28}$ car ln strictement croissant sur $]0;+\infty[$.

$\iff n > \frac{\ln \frac{5}{28}}{\ln 0,85}$ car $\ln 0,85 < 0$.

or $\frac{\ln \frac{5}{28}}{\ln 0,85} \simeq 10,6$ Donc $\boxed{n \geq 11}$

Partie B

1°) a) f est dérivable sur D_f en tant qu'homographie. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

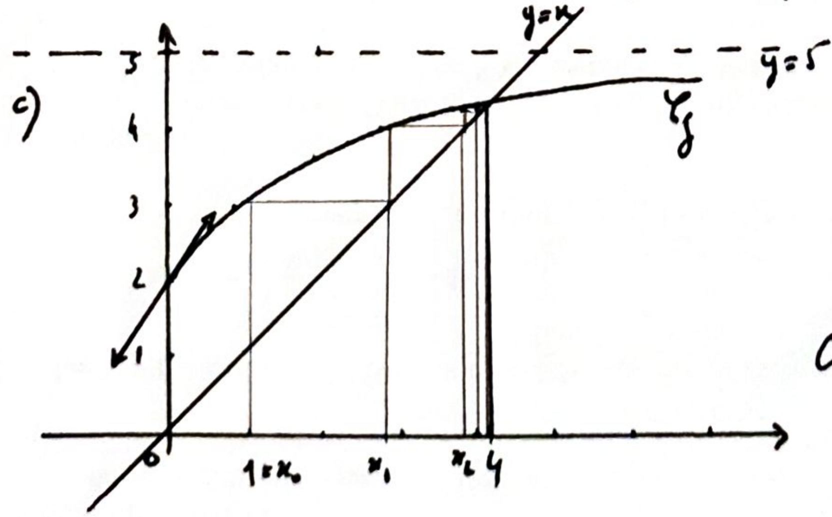
$f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	2 ↗	5

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(5 + \frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 5$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ au voisinage de $+\infty$.

c)



b) $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 2 = \frac{3}{2} x$

$\boxed{y = \frac{3}{2} x + 2}$

On conjecture que (x_n) est croissante, convergente vers 4.

2°) a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : " $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ ".

Initialisation : $u_1 = \frac{9}{3} = 3$ on a bien $0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$ donc P_0 vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour n fixé.

On a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4 \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$

car f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Or $f(0) = 2$ et $f(4) = 4$

Donc $0 \leq 2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_n est initialisée au rang 0, elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) De ce qui précède on conclut que (u_n) est croissante et majorée par 4, donc convergente par le théorème de limite monotone.

3°) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \boxed{4}$

Le nombre de collaborateurs satisfaits par le dispositif tend vers 4000.

Exercice 4

Partie A

1°) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$ car $\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty}(2x-7) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty}(2x-7) = -\infty$

2°) g est dérivable comme somme d'une fonction de référence et d'une fonction affine. $g'(x) = 2e^x + 2 = 2(e^x+1)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3°) g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de bijection monotone, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$.

De plus $g(0{,}94) < 0$ et $g(0{,}941) > 0$ (Calculatrice)

Donc $0{,}94 < \alpha < 0{,}941$.

4°)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1°) $f(x) = (2x-5)\dfrac{e^x-1}{e^x}$ donc

x	$-\infty$		0		$5/2$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2°) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$ car $\lim_{x\to+\infty}(2x-5) = +\infty$
et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$ par produit car $\lim_{x\to-\infty}(2x-5) = -\infty$
et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

3°) On utilise $(uv)' = u'v + uv'$
et $(e^u)' = u'e^u$.

$f'(x) = 2(1-e^{-x}) + (2x-5)(e^{-x}) = 2 - 7e^{-x} + 2xe^{-x} = e^{-x}(2e^x + 2x - 7)$
$= e^{-x} g(x)$. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

x	$-\infty$	0	α	$5/2$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$		$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

4°) a) $g(\alpha) = 0 \iff 2e^\alpha + 2\alpha - 7 = 0 \iff e^\alpha = \dfrac{7-2\alpha}{2} \iff e^{-\alpha} = \dfrac{2}{7-2\alpha}$

Donc $f(\alpha) = (2\alpha-5)(1-e^{-\alpha}) = (2\alpha-5)\left(1 - \dfrac{2}{7-2\alpha}\right) = \dfrac{(2\alpha-5)(5-2\alpha)}{7-2\alpha}$

$= \boxed{\dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}}$

b) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\qquad h'(x) = \frac{4(2x-5)\times(2x-7) - (2x-5)^2\times 2}{(2x-7)^2}$

$u(x) = (2x-5)^2$

$u'(x) = 2\times 2(2x-5)$ $\qquad = \frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}$ qui est positif sur $]-\infty ; \frac{5}{2}[$

Donc h est croissante sur $]-\infty ; \frac{5}{2}[$

$0{,}94 < \alpha < 0{,}941 \Rightarrow h(0{,}94) < \underbrace{h(\alpha)}_{=f(\alpha)} < h(0{,}941)$ $\qquad$ or $h(0{,}94) \simeq -1{,}901$ et $h(0{,}941) \simeq -1{,}899$

Donc $f(\alpha) \in [-1{,}89 ; -1{,}90]$

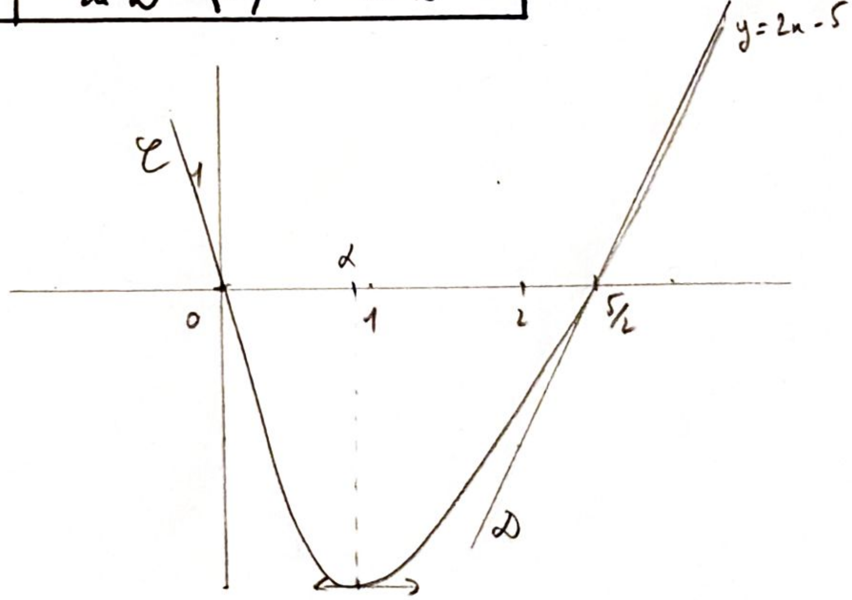
5°) $f(x) - (2x-5) = (2x-5)(1-e^{-x}) - (2x-5) = -e^{-x}(2x-5) = \frac{-2x}{e^x} + 5e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (cours) et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (2x-5)) = 0$

Ainsi $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 2x-5$ au voisinage de $+\infty$.

x	$-\infty$	$5/2$	$+\infty$
$f(x)-(2x-5)$	$+$	0	$-$
	$\mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{D}$	point de contact	$\mathcal{C}$ au-dessous de $\mathcal{D}$

6°)



Partie C.

1°) On a $A_n(n, 0)$, $B_n(n, 2n-5)$, $C_n(n, f(n))$

Compte tenu de ce qui précède, si $n \geq 3$, alors $\qquad 0 < f(n) < 2n-5$

Donc $C_nB_n = 2n-5-f(n)$ et $A_nB_n = 2n-5-0$

Ainsi $u_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}$

2°) a) $u_n = \frac{2n-5-(2n-5)(1-e^{-n})}{2n-5} = 1-(1-e^{-n}) = e^{-n}$

(u_n) est donc géométrique de premier terme $u_3 = e^{-3}$ et de raison e^{-1}.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $|e^{-1}| = |\frac{1}{e}| < 1$ $\qquad$ $\mathcal{C}$ admet $\mathcal{D}$ pour asymptote, donc $C_nB_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $A_nB_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

— •O• —