**Le sujet comporte quatre page, un exercice par page. Chacun d'entre eux est sur 5 points. Vous devez rendre UN paquet de copies différent par exercice. Soit 4 paquets. Tout manquement à cette (simple) règle sera sanctionné.**

Les documents sont interdits. Les calculatrices sont autorisées en mode examen.

Les téléphones portables sont éteints rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au pied du tableau.

**Exercice 1.**

Sauf mention du contraire, les résultats seront donnés sous la forme de fraction irréductible.
Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.
Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.
Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.
Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population.
On note :

- $M$ l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- $T$ l'évènement : « le test est positif ».

**1)** Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

**2)** **a)** Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?

**b)** Montrer que la probabilité que son test soit positif est de $0,0653$.

**3)** On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
On donnera le résultat sous forme approchée à $10^{-2}$ près.

**4)** On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note $X$ la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

**a)** Quelle est la loi de probabilité suivie par $X$ ? Préciser ses paramètres.

**b)** Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On donnera le résultat sous forme approchée à $10^{-2}$ près.

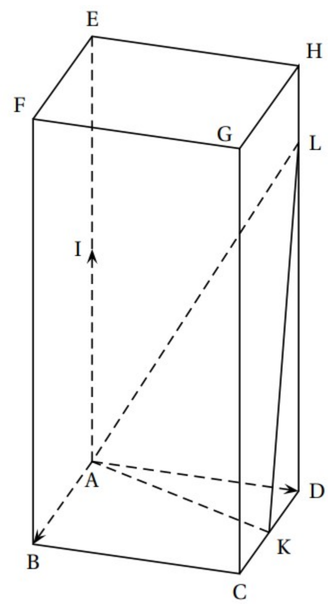
**5)** **a)** Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à $0,99$.

**b)** Ecrire un programme en Python permettant de retrouver ce nombre minimum.

**Exercice 2.**

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous.

Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. Le point N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).




On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0 ; 1 ; \frac{3}{2}\right)$.

**1)** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

**2)** **a)** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6 ; -3 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).

**b)** En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

**c)** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\Delta$ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

**d)** En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49} ; \frac{40}{49} ; \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

**3)** **a)** Montrer que le volume du tétraèdre ADKL noté $\mathscr{V}$ vaut $\frac{1}{8}$ en utilisant le triangle ADK comme base.

**b)** Calculer la distance du point D au plan (AKL).

**c)** Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

**Exercice 3.**

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite $(a_n)$.

Le terme $a_n$ désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le $n$-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

**Partie A.** :

**1)** Calculer $a_1$.

**2)** Justifier que pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

**3)** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.

**a)** Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $0,85$.

**b)** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.

**c)** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

**4)** Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

**Partie B.**

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où $u_n$ désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de $n$ mois après le mois de mai 2020.

**1) a)** Faire une étude rapide de la fonction $f$ définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$.

**b)** Déterminer la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

**c)** Tracer le graphe de $f$ ainsi que la tangente sur un repère orthonormé d'unité 1cm (ou un grand carreau)

**d)** Compléter le graphe précédent en traçant les trois premiers termes de la suite $(u_n)$. Que peut-on conjecturer sur la suite $(u_n)$ ?

**2) a)** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

**b)** Justifier que la suite $(u_n)$ est convergente.

**3)** On admet que pour tout entier naturel $n$,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)$ et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

**Exercice 4.**

**Partie A.** Etude d'une fonction auxiliaire.

La fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x - 7$.

**1)** Etudier les limites de $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
**2)** Etudier le sens de variation de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
**3)** Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$ telle que :

$$0,94 < \alpha < 0,941.$$

**4)** Donner le signe de $g$ sur $\mathbb{R}$.

**Partie B.** Etude d'une fonction.

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x-5)\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

**1)** Etudier le signe de $f$ sur $\mathbb{R}$.
**2)** Etudier les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
**3)** Calculer $f'(x)$, ou $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$ et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Dresser le tableau de variations de $f$.
**4) a)** Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.
**b)** Etudier le sens de variations de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$.
En déduire, à partir de l'encadrement de $\alpha$ obtenu dans la **partie A**, un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $f(\alpha)$.
**5)** Démontrer que la droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.
**6)** Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

**Partie C.** Etude d'une suite de rapports de distances.

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, on considère les points $A_n$, $B_n$, et $C_n$ d'abscisse $n$, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite $\mathcal{D}$ et à la courbe $\mathcal{C}$ ; soit $u_n$ le réel défini par :

$$u_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n}.$$

**1)** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, on a :

$$u_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}.$$

**2) a)** Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?
**b)** Calculer la limite de la suite $(u_n)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?