Raisonnements Mathématiques

Leçon 0
Tale-Spé Math- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Comment démontrer une implication ?

$$\boxed{P \Rightarrow Q}$$

ce qui veut sire que si P est vraie, alors Q est vraie.

I Raisonnement direct

Principe : On part de P vraie et on montre qu'elle implique P_1 vraie qui implique P_2 vraie et ainsi de suite jusqu'à Q vraie par transitivité :

$$\boxed{P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q}$$

Exemple mathématique :
On veut prouver que $\sqrt{x^2-5} = 2 \Rightarrow x \in \{-3;3\}$.
$\sqrt{x^2-5} = 2 \Rightarrow x^2 - 5 = 4 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$
$\Rightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x \in \{-3;3\}$.

Exemple de la vie courante :
On veut prouver que "ne pas travailler rend triste".
Si je ne travaille pas bien alors je vais avoir de mauvaises notes, ce qui va attrister mes parents et je n'aime pas que mes parents soient tristes car cela me rend triste aussi.

Nota Bene : seule la première implication n'est pas une équivalence, mais afin de ne pas l'oublier, mieux vaut rester avec des implications par la suite.

D'autre part, pour avoir une équivalence, il faut vérifier que les solutions finales soient solutions du problème de départ, ce qui n'est pas le cas ici.

II Raisonnement par contraposée

Principe : L'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à non(Q) $\Rightarrow$ non(P) (ou avec les notation de logique : $\neg Q \Rightarrow \neg P$). On part donc de $\neg Q$ et on montre qu'elle implique $\neg P$:

$$\boxed{\neg Q \Rightarrow \neg P}$$

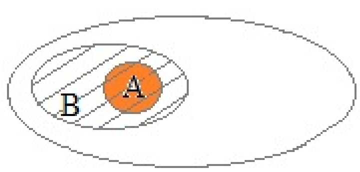
Exemple mathématique :
On veut prouver que (n^2 pair)$\Rightarrow$(n pair).

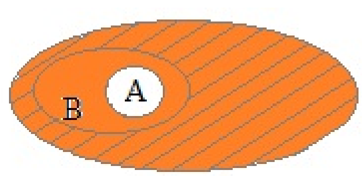
Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
Donc $n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1$
qui est impair.

Exemple de la vie courante :
On veut prouver que : "S'il pleut alors il y a des nuages."

S'il n'y a pas de nuages,
alors il ne peut pas pleuvoir.

Nota Bene : En terme ensembliste, cela se comprend très bien. Si on pose A l'ensemble des x satisfaisant la propriété P et B celui des éléments satisfaisant Q. Si $P \Rightarrow Q$, cela signifie que $A \subset B$, ce qui revient au même que l'inclusion des complémentaires $\bar{B} \subset \bar{A}$.





III Raisonnement par l'absurde

Principe : On suppose que P et $non(Q)$ sont vraies, et, via un raisonnement logique, on arrive à une contradiction.

$$\boxed{(P \text{ et } \neg Q) \text{ mène à une contradiction}}$$

Exemple mathématique :
On veut prouver que
"Si n est premier, $n \neq 2$, alors n est impair".

Si n est premier, $n \neq 2$ et n pair alors il existe $k \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ tel que $n = 2k$. Donc $1, 2$ et n sont des diviseurs distincts de n qui n'est donc pas premier. Contradiction.

Exemple de la vie courante :
On veut prouver que "On peut sauter sans parachute...
"... une seule fois." (paraprosdokian sentences)

Si l'on saute deux fois sans parachute alors on s'est écrasé la première fois.
Contradiction avec le fait de pouvoir recommencer.

Nota Bene : L'exemple le plus célèbre de démonstration par l'absurde est l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Attention ! Il ne faut pas confondre le raisonnement par l'absurde et par contraposée. Le premier arrive à une contradiction alors que le second aboutit à une vérité (donc je ne vois pas pourquoi on les confondrait ?! - et pourtant...).

IV Raisonnement par disjonction de cas

Principe : On veut montrer qu'une proposition est vraie pour un nombre fini de cas. On teste simplement tous les cas possibles.

Exemple mathématique :
On veut prouver que
"Le chiffre des unités d'un carré n'est jamais 3".

On regarde le chiffre des carrés des entiers
Si $n \in [\![0, 9]\!]$, alors n^2 finit par $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ qui ne contient pas 3.

Exemple de la vie courante :
On veut prouver que
"L'un de mes amis m'a trahi."

Je torture chacun d'entre eux
jusqu'à ce que l'un avoue.

Nota Bene : Un algorithme démontre quasiment exclusivement par disjonction de cas.

V Raisonnement par analyse-synthèse

Principe : On veut déterminer les solutions d'un problème. Pour cela, on suppose les solutions connues et on essaie de trouver un maximum de conditions nécessaires à ces solutions. Ensuite, on vérifie que ces conditions nécessaires sont suffisantes.

Exemple mathématique :
Quelles sont les solutions de $\sqrt{x+2} = x$?

ANALYSE : Si x est solution, alors $x + 2 = x^2$
ce qui donne $(x+1)(x-2) = 0$, soit $x \in \{-1; 2\}$.
De plus, comme $x = \sqrt{x+2}$, il est positif.
SYNTHESE : On vérifie que seul $x = 2$ est solution.

Exemple de la vie courante :
Le jeu "Qui est qui ?"

On pose des questions pour éliminer des possibilités
jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une.
Et on vérifie qu'il s'agit de la bonne.

Nota Bene :
- Ce type de raisonnement est souvent utilisé en géométrie quand on cherche un lieu de points.
- Un cas particulier de ce raisonnement est la **méthode du crible** comme dans l'exemple de la vie courante ci-dessus.
- A noter qu'avec ce raisonnement, on aboutit systématiquement à une équivalence (via la synthèse).

VI Raisonnement par récurrence

Principe : On veut montrer une propriété qui est indexée sur les entiers naturels.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n une propriété.
Initialisation : On démontre que P_0 est vraie.
Hérédité : On montre que si P_n est vraie pour n fixé, alors P_{n+1} est vraie.
Conclusion : P_n est vraie pour tout n.

Exemple mathématique :
On veut prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété
P_n : "9 divise $10^n - 1$" est vraie

INITIALISATION : 9 divise $10^0 - 1 = 0$ donc P_0 est vraie.
HEREDITE : On suppose P_n vraie pour n fixé.
On a $10^{n+1} - 1 = 10(10^n - 1) + 9$ qui est divisible par 9 en utilisant P_n.
CONCLUSION : Donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exemple de la vie courante :
Le jeu "Domino Day

Le premier domino poussé est l'initilisation.
Et un domino tombant entraînant un autre correspond à l'hérédité.
Tous les dominos doivent donc tomber.
(en théorie)

Nota Bene : Un cas particulier de ce raisonnement est la méthode du crible comme dans l'exemple de la vie courante.

Il existe différents types de récurrence : La **récurrence faible** (pour l'hérédité, P_{n+1} ne se démontre qu'à partir de P_n, comme dans le cas précédent), la **récurrence forte** (on a besoin de tous les P_p avec $p \leq n$ pour démontrer P_{n+1}), la **récurrence finie** (quand il n'y a qu'un nombre fini de barreaux à l'échelle). On pourrait parler aussi de récurrence double ou de récurrence de Cauchy mais cela nous mène trop loin. Les curieux chercheront par eux-mêmes.

Attention ! Le problème principal de la récurrence est qu'il faut avoir une idée du résultat auquel on veut aboutir, sans quoi, on serait bien embêté pour poser la propriété (P_n).

Remarque: Le principe de récurrence se démontre via l'axiome du choix (ou du lemme de Zorn qui est équivalent). Il s'agit donc d'une propriété très rudimentaire ; Il fut savoir néanmoins que, comme tout axiome, il y a des gens qui travaillent sur des mathématiques qui réfutent l'axiome du choix, donc le principe de récurrence.

VII Considérations ensemblistes

En termes d'ensembles, on a essentiellement deux types de questions qui se posent :

Comment montrer une appartenance ?

But 1 : Si A est un ensemble, on veut montrer qu'un élément x est dans A.
On commence toujours par caractériser les éléments de l'ensemble A ; puis on regarde si le pauv' x satisfait ces exigences.

Exemple: Je veux démontrer que je fais partie des professeurs du lycée Gustave Eiffel de Bordeaux. Il me faut tout d'abord caractériser les professeurs du lycée en question. Je peux prendre plusieurs caractéristiques : il sont tous très beaux et très forts par exemple...

Eh bien non. Ca plante parce qu'il peut y en avoir d'autres avec ces qualités ailleurs ! ! Il vaut mieux se ranger à des idées plus simples du genre : il est écrit "Lycée Gustave Eiffel Bordeaux" sur leurs Pass-Education (qui donne accès aux musées) - une feuille de salaire fonctionne aussi très bien.

Maintenant je reviens à ma petite personne et je présente mon Pass-Education. Je fais donc partie du club.

Exemple: Un autre exemple, mathématique cette fois : Nous voulons montrer qu'un nombre réel au carré est positif.

Ici, l'ensemble A est celui des réels positifs, $A = \mathbb{R}^+$ et mon élément est un carré, disons $x = y^2$ avec $y \in \mathbb{R}$.

Il nous faut caractériser un nombre positif... Ici, la définition issue de la relation d'ordre suffit : un nombre x est positif si et seulement si (on a bien une caractéristique !) $x \geq 0$.

Mais dans notre cas, on sait que $x = y^2$. Une petite disjonction de cas permet de conclure : Si $y \leq 0$, alors $y^2 \geq 0$; et de même, si $y > 0$, alors $y^2 > 0$ par la règle du produit des signes. Donc $x \in A$ (i.e. $y^2 \in \mathbb{R}^+$).

$\boxed{\text{But 2 :}}$ Si A et B sont des ensembles, on veut montrer qu'un élément x est dans $A \cup B$.
Il suffit de montrer que $x \in A$ ou $x \in B$ et on se ramène au But 1.

$\boxed{\text{But 3 :}}$ Si A et B sont des ensembles, on veut montrer qu'un élément x est dans $A \cap B$.
Il suffit de montrer que $x \in A$ et $x \in B$ et on se ramène, là encore, au But 1.

Et avec une application ?

On imagine que l'on possède une application $\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$.

On rappelle que la différence entre une application et une fonction est que l'application est définie partout sur son ensemble de départ.

$\boxed{\text{But 4 :}}$ Comment traduire $y \in B$?
Il suffit de dire qu'il existe un $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Pour toute application f et tout sous ensemble $C \subset B$, on peut définir l'image réciproque de C comme étant l'ensemble des $x \in A$ tels que $f(x) \in C$. i.e.

$$f^{-1}(C) = \{x \in A,\ f(x) \in C\}$$

Exemple: Prenons un exemple simple pour illustrer la situation : Si l'on prend pour l'application f, le prof de math corrigeant ses copies, l'ensemble de départ A est l'ensemble des copies et l'ensemble d'arrivée B, les notes obtenues.

Il s'agit bien d'une application car chaque copie obtient une note (une image). Mais toutes les valeurs de B ne sont pas nécessairement atteintes. S'il l'on choisit pour $C = \{y \in B,\ y \geq 10\}$ pour obtenir toutes les notes au-dessus de la moyenne, l'image réciproque de C est donc l'ensemble des copies qui valent 10 ou plus.

$\boxed{\text{But 5 :}}$ Comment traduire $x \in f^{-1}(C)$?
Il suffit de suivre la définition : si $x \in f^{-1}(C)$, il suffit de regarder si $f(x) \in C$.

VIII Quid du contre-exemple ?

Par **contre-exemple**, on ne fait qu'infirmer une propriété, i.e. montrer qu'elle est fausse.