Suites

Leçon 1
Tale-Spé Math- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

"On ne veut pas mourir. Chaque homme est proprement une suite d'idées qu'on ne veut pas interrompre." Montesquieu (1689-1755).

I Définitions et premiers exemples

Si je vous donne une séquence de nombres : 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, 18367353072152, 69533550916004, 263747951750360, 1002242216651368, 3814986502092304 ...

Quelle est cette suite et comment écrire le terme suivant ?

Définition 1.1 *Une* ***suite (réelle)*** *est la donnée d'une application φ de $\mathbb{N}$ (dans $\mathbb{R}$).*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & \varphi(n) = u_n \end{array}$$

On utilise souvent la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore plus bref : (u_n).

Plus rarement (surtout dans le postbac), on peut trouver tout simplement u.

Attention ! On n'écrit jamais u_n pour parler de la suite, car u_n est un réel et pas la suite en elle-même. Il y a la même nuance entre u_n et (u_n) qu'entre $f(x)$ et f ! ! !

Remarque: Il peut arriver qu'une suite ne soit pas définie sur $\mathbb{N}$ tout entier. Il peut notamment manquer les premiers termes. On laisse au lecteur le loisir d'adapter la définition.

Exemple: Si vous regardez votre carnet de santé, vous vous rendrez compte que votre maman a fait une petite croix tous les mois depuis votre naissance (au moins au début) afin de garder trace de votre taille. Logique, elle vous aime votre maman et elle voulait s'assurer que vous grandissiez normalement. Mais en fait, quand on y pense, elle a transcrit votre taille sous la forme d'une suite : u_0 votre taille à la naissance, u_1 après un mois et ainsi de suite...

Il existe essentiellement deux façons de définir une suite :

- Soit de façon explicite en donnant la fonction φ sous-jacente : $\boxed{u_n = \varphi(n)}$.

Par exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$ en est une. Au passage, elle n'est définie qu'à partir de $n = 1$.

- Soit par relation de récurrence en donnant le lien que possède un terme de la suite avec ses prédécesseurs : $\boxed{u_{n+1} = f(u_n)}$.

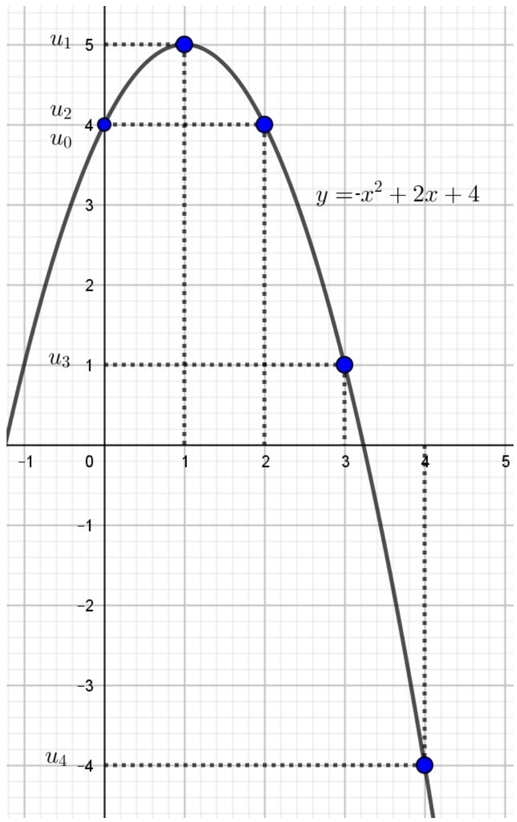
Par exemple, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Mais on se rend vite compte qu'il manque quelque chose ici... En effet, sans le premier terme, on ne peut pas trouver tous les termes de la suite. Il est donc primordial de définir la valeur du premier terme !

A ce niveau, on peut préciser que l'on peut étendre les définitions par relations de récurrence, soit en augmentant le nombre de termes dont dépend la suite (e.g. $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ - voir suite de Fibonacci à la fin de ce cours) ou en croisant plusieurs suites (e.g. $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$) mais il s'agit d'une autre histoire.

Représentations graphiques :

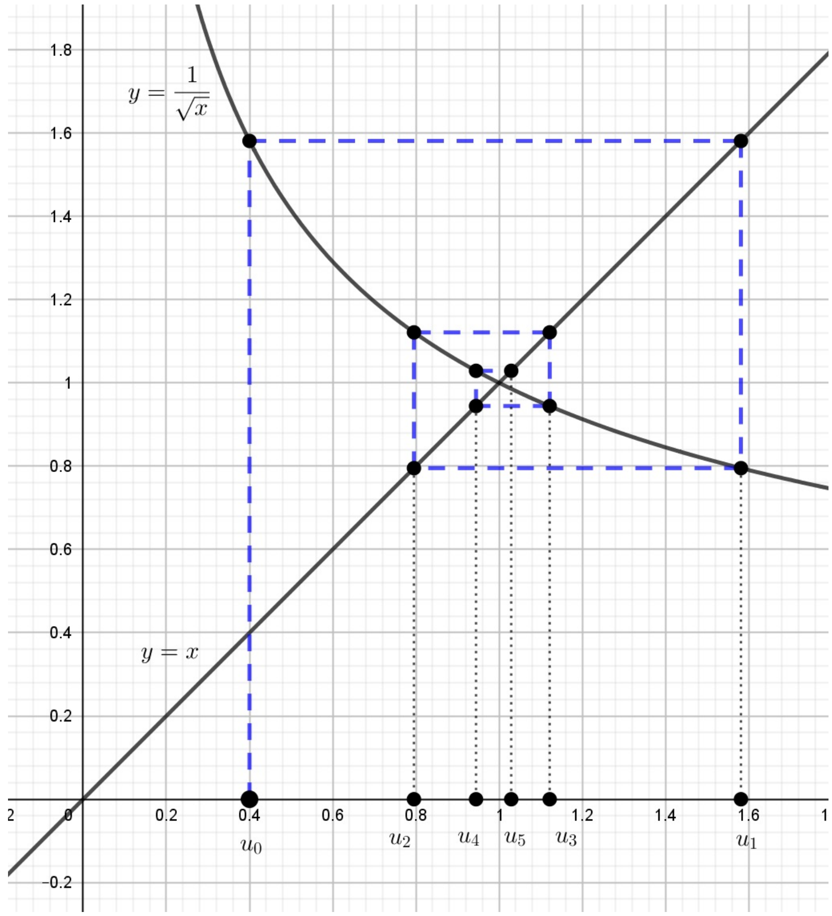
• Pour les suites définies de façon implicite, il n'y a pas grand chose à comprendre si ce n'est que l'on peut les visualiser comme des fonctions que l'on aurait passées à travers une passoire (celle des entiers).

Exemple: $u_n = -n^2 + 2n + 4$.



• Pour les suites définies par récurrence, il faut suivre le guide : On part de u_0, on le reporte sur la courbe parce que l'on veut $f(u_0) = u_1$, puis on veut recommencer, mais pour cela il nous faut u_1 sur l'axe des abscisses. Qu'à cela ne tienne, on envoie le u_1 trouvé sur l'axe des abscisses avec l'aide de la symétrie axiale d'axe $y = x$ et on continue jusqu'à en avoir marre.

Exemple: $u_0 = 0,4$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.



Remarque: Si l'on reprend l'exemple de la suite (u_n) de votre croissance tracée sur votre carnet de santé, on peut aussi décider que regarder la taille tous les mois ce soit un peut trop et décider plutôt de la regarder tous les deux mois. A partir de la suite donnée, on extrait la suite (u_{2n}) qui correspond bien à la taille, mais uniquement les mois pairs. On parle de **suite extraite**.

II Suites arithmétiques et géométriques

II.1 Suites arithmétiques

Définition 1.2 *Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si elle peut être définie par la relation de récurrence*

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

*où r est une constante réelle appelée la **raison** de la suite.*

De façon analogue, on peut dire que $u_{n+1} - u_n$ est constante pour tout $n \in \mathbb{R}$.

Exemple: Commençons en douceur par la suite la plus triviale qui soit, celle des entiers : $0, 1, 2, 3, \ldots$. Elle correspond à la suite définie de façon explicite par la fonction identité ($\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$) : $u_n = \varphi(n) = n$. Et elle est bien arithmétique puisque $u_{n+1} - u_n = n + 1 - n = 1$ est constant.

Par une récurrence triviale, on montre que $\boxed{u_n = nr + u_0}$.

Exercice 1.

La Lune s'éloigne de la Terre de $3,8$cm par an. Quand la distance Terre-Lune aura augmenté de 23 500km, La Terre ne pourra plus couvrir la Lune et il n'y aura plus d'éclipse totale.
Mais dans combien de temps ?

D'autre part, on peut considérer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}}.$$

On retient cette formule en remarquant :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \overset{\text{Nombre de termes de la somme}}{(n+1)}\overset{\text{Moyenne des deux termes extrêmes}}{\frac{u_0+u_n}{2}}$$

Remarque: Une anecdote classique raconte que Gauss aurait trouvé tout seul cette formule à l'âge de sept ans afin de calculer la somme des cent premiers entiers non nuls : $1+2+3+\cdots+99+100 = 100\times\frac{1+100}{2} = 5\ 050$.

Exercice 2.

Prouver la formule précédente. (No pressure but Gauss was seven.)

Exercice 3.

Un exemple typique est un placement à taux d'intérêt fixe. On imagine que l'on place une certaine quantité d'argent $C_0 = 1\ 000$€ et que l'on dépose tous les mois 100€. Au bout de combien de temps pourrais-je me payer la *National 14-fret style "O" de 1937* (c'est la guitare de Mark Knopfler dans l'album Brothers in Arms) ? Elle vaut 3690€.

II.2 Suites géométriques

Définition 1.3 *Une suite (u_n) est dite* ***géométrique*** *si elle peut être définie par la relation de récurrence*

$$\boxed{u_{n+1} = qu_n}$$

où q est une constante réelle appelée la ***raison*** *de la suite.*

De façon analogue, et seulement si la suite ne s'annule pas, on peut dire que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante pour tout $n\in\mathbb{R}$.

Par récurrence triviale, on montre que $\boxed{u_n = q^n u_0}$.

D'autre part, on peut considérer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}.$$

Cette formule n'a de sens que si $q\neq 1$ (auquel cas la suite est constante).

On retient cette formule en remarquant :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \overset{\text{Premier terme}}{u_0}\frac{1-q^{\overset{\text{Nombre de termes}}{n+1}}}{1-q}$$

Exercice 4. ♩

Prouver la formule sommatoire précédente.

Exercice 5. ♩

Un exemple typique est un placement à taux d'intérêt composé. On imagine l'on place encore une certaine quantité d'argent $C_0 = 1\ 000$€ mais cette fois-ci, on a des intérêts au taux $t = 2,1$ en pourcentage et par an. Comme sur vos comptes épargne, l'argent s'accumule de lui-même et plus le temps passe, plus les intérêts sont importants car calculés sur la somme amassée. Au bout de combien de temps pourrais-je me payer le *Yamaha C3 de Michel Petrucciani* ? Il vaut 36 000€.

Exercice 6. ♩ *(La Tour Saint Michel)*

Je jette du haut de la Tour Saint Michel une balle rebondissante qui ne remonte à chaque fois que du tiers de la hauteur dont elle vient de chuter.

1) Quelle est la hauteur atteinte après le $n^{\text{ième}}$ rebond ?

2) Quelle est la distance totale parcourue par la balle ?

Exercice 7. ♩ *(op. cit. Guillaume Dutheil)*

Une bouteille d ?eau est posée sur la table. Je bois la moitié de la bouteille puis vous buvez la moitié de ce qu'il reste. Je bois à nouveau la moitié de ce qu'il reste et vous buvez à nouveau la moitié de ce qu'il reste... On continue ainsi de suite jusqu'à finir la bouteille.
Quelle quantité d'eau avez-vous bu ?

Exercice 8. ♩ *(op. cit. Guillaume Dutheil)*

Supposons qu ?initialement le prix d'une action vaille 100€. Aujourd ?hui (jour 1), le cours de cette action varie de $+1\%$ puis le lendemain le cours de cette action varie de -1% puis le surlendemain le cours de cette action varie à nouveau de $+1\%$, puis une nouvelle fois de -1% et ainsi de suite...

1) Vers quel prix le cours de cette action converge-t-il au bout d ?un très grand nombre d ?années ?

2) Existe-t-il un seuil (nombres de jours) à partir duquel le cours de cette action sera toujours inférieur ou supérieur à $100e$. Si oui, lequel ?

Exercice 9. ♩ *(von Neumann)*

Here is the riddle one wants to solve : "Two trains 200 miles apart are moving toward each other ; each one is going at a speed of 50 miles per hour. A fly starting on the front of one of the trains flies back and forth between them at a rate of 75 miles per hour. It does this until the trains collide and crush the fly to death. What is the total distance the fly has flown ?"

III Monotonie

III.1 Définitions et premiers exemples

Définition 1.4 *On dit qu'une suite (u_n) est* ***croissante*** *(resp.* ***strictement croissante*** *à partir du rang n_0 si $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$) pour tout $n \geq n_0$.*
Mutatis mutandis pour ***décroissante***
On dit que la suite est ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante (exclusivement).*

Définition 1.5 *La suite (u_n) est dite* ***stationnaire*** *s'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_{n+1} = u_n$.*
La suite (u_n) est dite ***constante*** *si elle est stationnaire avec n_0 le premier rang de la suite.*

Définition 1.6 *On dit qu'une suite (u_n) est **alternée** si, pour tout n, $u_n u_{n+1} < 0$.*

Exercice 10.

Etudier les comportements des suites définies par :

1) $u_n = \left\lfloor \dfrac{1}{n} \right\rfloor$ **2)** $v_n = (-1)^n$ (le trublion) **3)** $w_n = \sqrt{n-3}$.

III.2 Techniques analytiques

On se place ici dans le cas où la suite est définie de façon explicite sous la forme $u_n = \varphi(n)$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.7 *Soit la suite (u_n) définie à l'aide de la fonction φ par $u_n = \varphi(n)$.*
Si φ est monotone sur $[0, +\infty[$, alors la suite (u_n) a la même variation que φ.

Démonstration: Immédiate.

□

Exercice 11.

Déterminer les comportements des suites définies par :

1) $u_n = \cos\frac{\pi}{n}$ **2)** $v_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$.

Attention ! La proposition n'est qu'une implication. La réciproque est fausse. Sauriez-vous trouver un contre exemple ?

Remarque: Dans la cas où la suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, il existe des théorèmes concernant les variations de la suite (u_n) à partir de celles de la fonction f. Néanmoins la multiplication des cas particuliers est telle qu'il vaut mieux faire à chaque fois une étude qui reste élémentaire. On pourra s'intéresser aux cas triviaux où f est continue décroissante (qui donne une suite alternée) et continue croissante (qui donne des suites monotones)

III.3 Techniques algébriques

On reconditionne la définition pour obtenir la

Proposition 1.8 *La suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 si et seulement si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$.*

Exercice 12.

Déterminer le comportement de la suite (u_n) définie par $u_n = 2n + \sin n$.

Proposition 1.9 *Si la suite (u_n) est à termes strictement positifs, on a (u_n) croissante à partir du rang n_0 si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \geq n_0$.*

Remarque: On peut écrire une proposition semblable dans le cas où la suite est à terme négatifs ou lorsque l'on parle de décroissance. Le nombre incalculable d'erreurs de la part des élèves quand on donne tous les cas me font penser qu'il vaut mieux se contenter d'un truc qui fonctionne et de laisser aux meilleurs le loisir de l'adapter en prenant soin de faire attention à la multiplication d'une inégalité par un nombre en fonction de son signe.

Exercice 13. ♪

Etudier les comportements des suites définies par :

1) $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$ **2)** $v_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

III.4 Par récurrence

Le problème de la récurrence, comme toujours, est qu'il faut avoir une idée de ce à quoi on veut aboutir.

Exemple type : Etudions le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 16$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Le calcul des premiers termes nous laisse penser que la suite est strictement décroissante. Faire un graphe pour s'en rendre compte.

On pose donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété (P_n) : $u_{n+1} < u_n$.

Et c'est parti pour les trois phases :

- Initialisation : (P_0) est vraie car $u_0 = 16$ et $u_1 = 4$, donc $u_1 < u_0$.
- Hérédité : Supposons (P_n) vraie pour n fixé. On a donc $u_{n+1} < u_n$. On compose donc par la racine carrée et on obtient $\sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n} \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+2} < u_{n+1}$. Donc (P_{n+1}) est vérifiée et c'est gagné.

Eh bien non. En fait, pour utiliser la croissance de la fonction $\sqrt{.}$, il faut être sûr que tout est positif, ce que nous n'avons pas fait. On doit donc changer la propriété (P_n) en $0 \leq u_{n+1} < u_n$. il faut donc tout réécrire (laissé au lecteur).

- Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, la suite est strictement décroissante. Ouf !

... SAUF QUE... Il y a une coquille... Le raisonnement est faux. Essayez de le corriger.

IV Minoration - Majoration

IV.1 Définition

Définition 1.10 *Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n.*

*De façon analogue, une telle suite est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout n.*

*On dit de plus que la suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.*

Remarque: Un majorant n'est pas nécessairement un maximum. Effectivement, si π est un majorant, alors $\pi + e$ aussi, ainsi que n'importe quel nombre plus grand.

Attention ! A ce stade, il faut faire attention à l'ordre dans l'écriture. Le deux phrases suivantes ne veulent pas dire la même chose :

- Il existe $M \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq M$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$.

En effet, prenons un exemple concret : la taille des Hommes. On assimile n au numéro de l'Homme et u_n sa taille. Le réel M est alors un majorant de la taille.

La première phrase mathématique se traduit par : "Il existe un majorant à la taille de tout être humain", i.e. il existe une taille qu'aucun être humain n'a dépassé. On peut prendre 3m par exemple. (au passage le maximum est 2m72 atteint par Robert Wadlow (1918-1940)). Cette borne est un majorant universel, pour tout le monde.

La seconde phrase dit : "Pour tout homme, il existe un majorant". Donc pour moi, je peux prendre 1m80, pour mes enfants, 2m. La nuance vient de ce que le majorant dépend de l'homme considéré puisqu'il est choisi avant ! !

Exercice 14. ♪

Montrer que la suite (u_n) est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n.

IV.2 Techniques analytiques

Proposition 1.11 *Si une suite est définie de façon explicite par $u_n = \varphi(n)$ et si φ est une fonction majorée ou minorée ou bornée sur $[0, +\infty[$, alors il en est de même pour la suite (u_n).*

Démonstration: Trivial.

□

Exercice 15. ♪

Déterminer si la suite définie de manière explicite par $u_n = \varphi(n) = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$ est bornée.

IV.3 Techniques algébriques

En général, c'est dans ce paragraphe que l'on voit les meilleurs matheux. Dans le postbac, les étudiants capables de trouver très vite des majorations ou des minorations font bien souvent la différence avec les autres.

Il n'y a pas vraiment de théorème ou de proposition à dérouler mais plutôt des astuces et beaucoup de bon sens. Nous allons voir cela à travers un certain nombre d'exemples :

Exercice 16. ♪

Déterminer si la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$ est bornée.

Exercice 17. 𝅗𝅥

Déterminer si la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ est bornée.

Exercice 18. ♩

On considère ici la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{k}$.

Calculer les premiers termes et déterminer si elle est bornée.

IV.4 Par récurrence

Là encore, il faut avoir les bornes, sans quoi on ne peut pas appliquer le principe de récurrence.

Si l'on considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ avec $u_0 = 3$, on peut penser que $0 \leq u_n \leq 3$.

La récurrence ne pose pas de problème et est laissée au lecteur.

Ceci dit, en ouvrant un peu les yeux, on aurait peut-être pu voir que la suite était constante !

Essayons avec un exemple moins trivial : On veut étudier la suite (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

Si c'est la première fois que vous la rencontrez, marquez ce jour d'une pierre blanche et vous vous en souviendrez pour les 150 autres fois où vous la retrouverez.

Il est clair qu'elle est minorée par 0, mais par quoi peut-on la majorer ?

Il faudrait majorer les $\dfrac{1}{k!}$ par quelque chose dont on sait calculer la somme... Une suite géométrique par exemple. Cela mérite un exercice.

Exercice 19. ♩ *(Un must !)*

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n! \geq 2^{n-1}$.

2) Conclure en majorant la suite (u_n).

V Convergence

V.1 Définition - le tube !

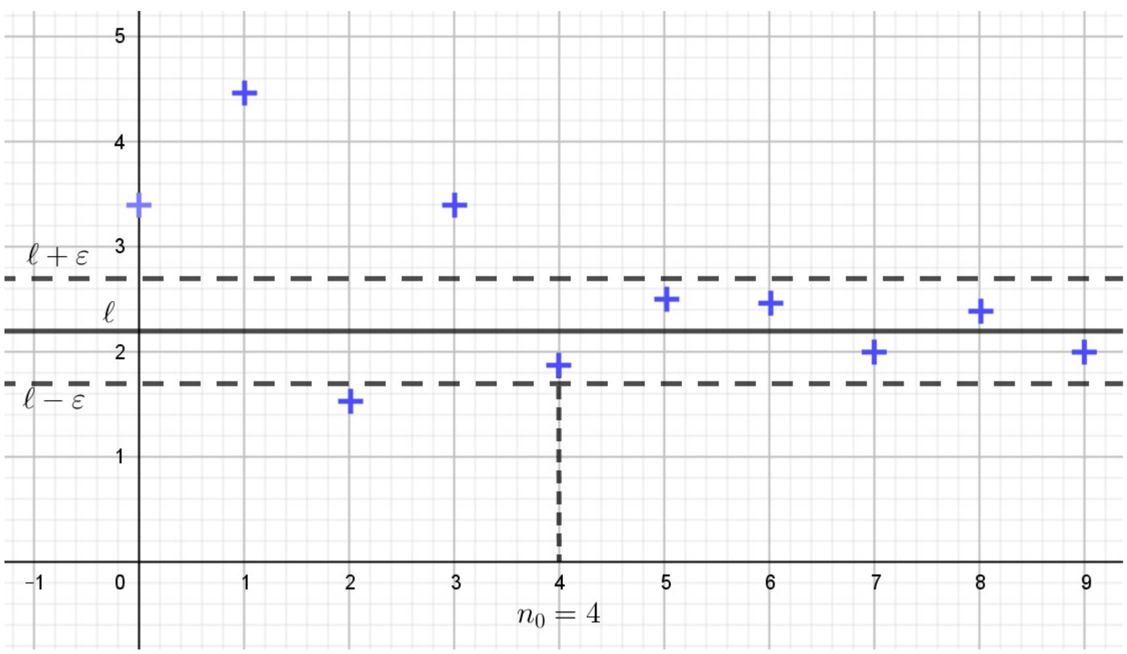
Pour bien appréhender la définition de la convergence d'une suite, il faut penser à un tireur de fléchettes. Il tire une infinité de fois en direction du centre de la cible. Comment interpréter que "le tir converge vers ce centre" ?

On pourrait penser que cela signifie que le tireur s'améliore à chaque essai, mais ce n'est pas tout à fait cela. En effet, il pourrait avoir une petite défaillance à un moment, mais l'essentiel est que celles-ci soient de plus en plus rares, et surtout, de moins en moins défaillantes.

Si l'on appelle d_n la distance séparant la $n^{\text{ième}}$ fléchette tirée du centre, on obtient une suite que l'on peut représenter de façon implicite :

On va donc dire qu'il y a convergence si, 'globalement', il se rapproche du centre de la cible. Autrement dit, si à un moment n_0, on décide de diminuer le rayon de sa cible, les tirs restent dans la cible.

Plus généralement, on n'a pas toujours affaire à des suites positives tendant vers 0. On pourrait donc avoir ce type de graphique :



On traduit le fait que ℓ est la limite de la suite (u_n) si, pour tout tube autour de ℓ, il existe un moment à partir duquel les termes de la suite sont dans le tube. En fait, par analogie avec l'exemple précédent, on se donne une cible (le tube) et si les tirs tendent vers le centre de la cible (la suite tend vers ℓ), il existe un tir (un rang n_0) à partir duquel toutes les fléchettes sont dans la cible (tous les (u_n) sont dans le tube.

Définition 1.12 *(ε-définition) On dit qu'une suite (u_n) tend vers un réel ℓ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.*

Remarque: Avec des quantificateurs, cela donne

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On peut aussi dire que tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Attention ! Dans cette définition, on voit bien que n_0 dépend de ε.

Exercice 20. ♪

Montrer que la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ admet une limite.

Exercice 21. ♪

Montrer que si (u_n) converge, alors toute suite extraite converge également.

Exercice 22. ♩

Montrer que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

V.2 Propriétés

Proposition 1.13 *Si la suite (u_n) admet une limite, alors elle est unique.*

Proposition 1.14 *Si la suite (u_n) est convergente, alors elle est bornée.*

Exercice 23. ♩
Montrer que si (u_n) est bornée et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n v_n = 0$.

V.3 Divergence, la vraie, (pas la dystopie pour ado)

Voila une définition qui va mobiliser pas mal de neurones :

Définition 1.15 *Une série qui n'est pas convergente est dite **divergente**.*

En fait, si une suite ne tend pas vers une limite ℓ finie, elle diverge. Cependant, il y a diverses façons de diverger...

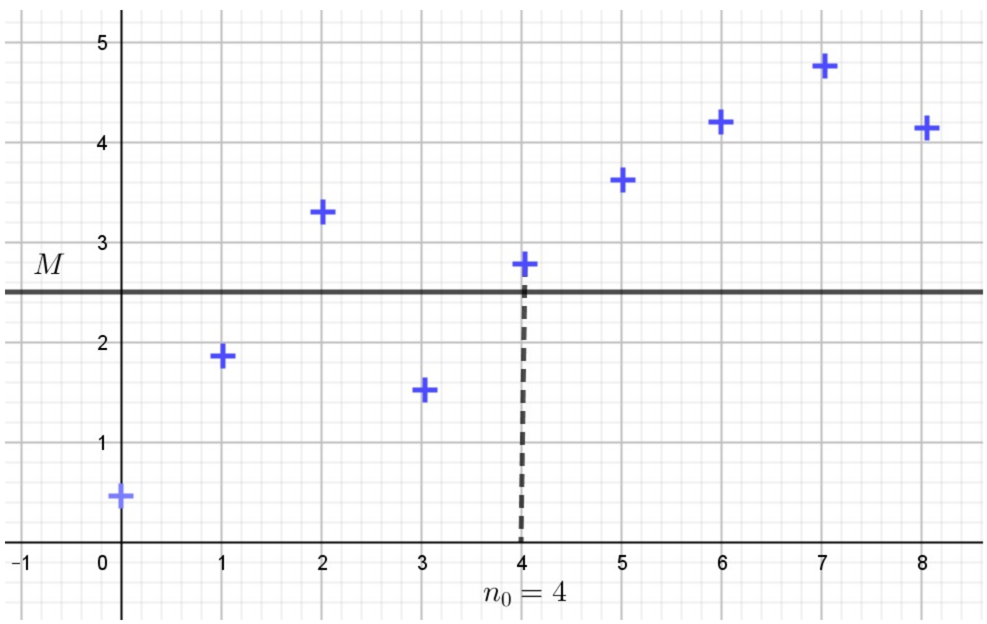
V.3.1 Divergence vers $\pm\infty$

Commençons par les suites qui tendent vers $+\infty$ (pour celles qui tendent vers $-\infty$, on posera $v_n = -u_n$!o). Comment traduire cela proprement, mathématiquement ?

Il serait faux de penser qu'elle croît tout le temps. Si l'on prend $u_n = \frac{-1}{n}$, elle est croissante et majorée par 0. Dommage.

En fait, il faut exprimer le fait qu'elle n'est pas majorée. Autrement dit, si on se fixe une borne, elle finit toujours par la dépasser !

Définition 1.16 *Une suite (u_n) est dite* ***divergente vers*** $+\infty$ *lorsque quel que soit M, il existe n_0 tel que, quel que soit $n \geq n_0$, on ait $u_n > M$.*



Exercice 24.
Ecrire la définition de (u_n) diverge vers $-\infty$.

Attention ! Une suite divergente vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

Exercice 25.
Fournir un exemple explicite de suite divergente vers $+\infty$ mais qui n'est pas croissante.

Exercice 26.
On pose $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $u_0 = 0$. Calculer les premiers termes et conjecturer le terme général de u_n en fonction de n. En déduire la divergence.

Proposition 1.17 *Toute suite croissante non majorée est divergente vers* $+\infty$

Exercice 27.
Démonstration.

V.3.2 D'autres types de suites divergentes

Mais il existe aussi des suites qui divergent sans pour autant diverger vers $+\infty$. Le trublion $u_n = (-1)^n$ par exemple.

Exercice 28. 𝅗𝅥
Montrer que les suites $(\sin(n))$ et $(\cos(n))$ divergent.

VI Théorèmes majeurs

VI.1 Opérations élémentaires sur les limites

Dans tout ce paragraphe, ℓ et ℓ' sont des réels.

Commençons par

Proposition 1.18 *(La somme)*

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite						

Démonstration: Si (u_n) tend vers ℓ et (v_n) tend vers ℓ'. Que peut-on dire de la limite de $(u_n + v_n)$?

Remarque: La dernière colonne est intéressante : Il s'agit d'un cas d'**indétermination**.
Cela signifie que l'on ne peut pas prédire en toute généralité quelle va être la limite. Il faut regarder au cas par cas.

- Par exemple, si l'on prend $u_n = n^2$ et $v_n = -n^2$, on trouve $u_n + v_n = 0$, donc $\lim(u_n + v_n) = 0$.
- Mais si on considère $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, on trouve $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.

Donc dans le cas général, on ne peut pas conclure.

On essaie un peu plus dur avec

Proposition 1.19 *(Le produit)*

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n v_n)$ a pour limite									

Remarque: Le symbole $\pm$ est abusif et n'a aps sa place dans une copie. Il permet juste ici de limiter le nombre de colonnes. C'est mal.

Démonstration: On traite, là encore le cas où (u_n) et (v_n) tendent respectivement vers ℓ et ℓ'.

Exercice 29. ♪ *Le cas d'indétermination du produit.*

Trouver deux exemples de paires de suites (u_n) et (v_n) satisfaisant les hypothèses de la dernière colonne du tableau et pour lesquelles les limites de $(u_n v_n)$ sont différentes.

Et pour finir en beauté,

Proposition 1.20 *(Le quotient)*

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
alors $(\frac{u_n}{v_n})$ a pour limite							

Si (u_n) a pour limite	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0
et si (v_n) a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $(\frac{u_n}{v_n})$ a pour limite					

Remarque: Idem ici, on a pris la liberté d'utiliser la notation 0^+ et 0^- qui doit pas apparaître dans une copie.

Exercice 30. ♪ *Le cas d'indétermination du quotient.*

1) Dans chacune des deux indéterminations, trouver deux exemples de paires de suites (u_n) et (v_n) satisfaisant les hypothèses et pour lesquelles les limites de $(\frac{u_n}{v_n})$ sont différentes.

2) Peut-on obtenir toutes les limites possibles pour $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ avec les conditions $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 31. ♩

On trouve parfois des livres de mathématiques qui se permettent de faire des raccourcis ravageur juste pour gagner de la place... Par exemple, il en est qui écrivent que "si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \infty$.

Montrer que c'est faux avec un contre-exemple (et pas que en prenant $\ell = 0$).

Attention ! On ne compose pas des limites de suite : Essayer de trouver la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. On y reviendra plus tard quand on sera plus armé.

VI.2 On en a gros !

Lemme 1.21 *<u>Si</u> (u_n) est une suite positive convergente, <u>alors</u> $\lim u_n \geq 0$.*

<u>Démonstration:</u>

Théorème 1.22 *(Passage à la limite) Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $u_n \leq v_n$ pour tout entier n à partir d'un certain rang n_0.*

On a alors $\boxed{\lim u_n \leq \lim v_n}$.

<u>Attention !</u> Si on a une inégalité stricte au niveau des suites, elle devient large pour les limites. Exemple : $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

<u>Démonstration:</u>

Théorème 1.23 *(Théorème de la limite monotone)*

Toute suite croissante et majorée est convergente.

De même, toute suite décroissante et minorée est aussi convergente.

La démonstration utilise Borel-Lebesgue et est hors programme.

Théorème 1.24 *(Théorème de comparaison)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour tout entier n à partir d'un certain rang n_0.

- *<u>Si</u> (u_n) diverge vers $+\infty$, <u>alors</u> (v_n) aussi.*
- *<u>Si</u> (v_n) diverge vers $-\infty$, <u>alors</u> (u_n) aussi.*

Exercice 32. ♪ *Démonstration.*

Exercice 33. ♪

Déterminer les limites des suites définies par

1) $u_n = 2\cos n + 3 \times (-1)^n - 3n$ **2)** $v_n = n^4(\cos n - 2)$.

Théorème 1.25 *(Théorème d'encadrement dit aussi théorème des gendarmes)*

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout entier n à partir d'un certain rang n_0.

<u>Si</u> (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, <u>alors</u> (v_n) aussi.

Exercice 34. ♪

Tracer un graphe de la situation pour s'en convaincre et démontrer ce théorème.

VI.3 Retour sur les suites géométriques

Proposition 1.26 *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.*

- *Si $u_0 = 0$, alors (u_n) est constante et nulle.*
- *Si $|q| < 1$, alors (u_n) converge vers 0.*
- *Si $q = 1$, alors (u_n) est constante égale à u_0.*
- *Si $q > 1$ et $u_0 \neq 0$, alors (u_n) est divergente vers signe$(u_0)\infty$.*
- *Si $q \leq -1$ et $u_0 \neq 0$, alors (u_n) est divergente et alternée.*

Remarque: La démonstration peut se faire en deux lignes via les limites de la fonction exponentielle sur laquelle nous reviendrons. En voici une autre qui est au programme :

Démonstration: On commence par démontrer l'inégalité de Bernoulli : Pour tout entier $n > 1$ et tout réel $x \geq -1$ avec $x \neq 0$, on a $\boxed{(1+x)^n > 1 + nx}$.

La démonstration se fait par récurrence.

- Si $q = 0$, il n'y a rien à démontrer car la suite est stationnaire en 0.
- Si $q > 1$, alors il existe $x > 0$ tel que $q = 1 + x$, auquel cas $q^n > 1 + nx$. Le terme de droite tend vers $+\infty$, donc par comparaison, (u_n) tend aussi vers $+\infty$.
- Si $0 < q < 1$, alors $\frac{1}{q} > 1$ et d'après ce que l'on vient de dire, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$. Donc par inverse (u_n) tend vers 0.
- Si $-1 < q < 0$, alors on encadre : $-|q^n| \leq q^n \leq |q^n|$ et on obtient le résultat par encadrement. A noter que, dans ce cas, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
- Si $q = -1$, la suite prend alternativement les valeurs u_0 et $-u_0$ et ne peut converger car $u_0 \neq 0$. Et si $q < -1$, on étudie les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), l'une tendant vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$. D'où la divergence.

□

VII Suites adjacentes

Définition 1.27 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.*

Théorème 1.28 *Si (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**, alors elles sont convergentes vers une même limite l (et $u_n \leq l \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).*

Démonstration:

Exemple: (Un classique) On pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

Un autre exemple dû à Euler :

Exercice 35. ♩

Démontrer que les suites définies par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.

VIII De grands classiques

Exercice 36. ♩

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 37. ♩ *(Suites arithmético-géométriques)*

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $u_0 = 5$.

1) Faire un graphique en traçant les premiers termes de la suite.
2) Si on suppose que la suite converge vers ℓ, déterminer cette limite.
3) On pose $v_n = u_n - \ell$. Montrer que (v_n) est géométrique.
4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 38. 𝅗𝅥

1) Calculer la somme des n premiers carrés d'entiers non nuls.
2) Faire de même avec la somme des n premiers cubes.

Exercice 39. 𝅗𝅥 *(Algorithme d'Héron - Rapidité de convergence)*

On pose $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right)$ et $u_0 > 0$.

1) Interprétation géométrique ?
2) Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers $\sqrt{5}$.
3) Si l'on prend $u_0 = \frac{5}{2}$, calculer u_3. Que remarquez-vous ?
4) Montrer que $\dfrac{u_{n+1} - \sqrt{5}}{u_{n+1} + \sqrt{5}} = \left(\dfrac{u_0 - \sqrt{5}}{u_0 + \sqrt{5}}\right)^{2^{n+1}}$
5) En déduire que $u_{n+1} - \sqrt{5} = (u_{n+1} + \sqrt{5}) \left(\dfrac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}\right)^{2^{n+1}}$.

6) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5 - u_n^2}{2u_n}$ et en déduire les variations de la suite (u_n).

7) Prouver que la suite converge.

8) Montrer que $0 < u_{n+1} - \sqrt{5} < 5\left(\dfrac{1}{17}\right)^{2^{n+1}}$.

9) Quelle est la précision minimale de u_3 ?

Exercice 40. 𝅗𝅥 *(La série harmonique)*

On pose $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. On se propose de montrer qu'elle diverge vers $+\infty$.

1) Etudier les variations de (h_n).

2) Montrer que pour tout n, on a $h_{2n} \geq h_n + \dfrac{1}{2}$.

3) En déduire que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0 tel que $h_{n_0} \geq M$ et conclure.

Exercice 41. 𝅝 *(Les morceaux de sucre)*

On empile des sucres sur le bord d'une table. Jusqu'où peut-on déborder ?

IX Addendum sur les moyennes

On connaît tous la moyenne arithmétique de a et b obtenue par la formule $M_a = \dfrac{a+b}{2}$.

Mais il existe d'autres moyennes : notamment

- la moyenne géométrique $M_g = \sqrt{ab}$,
- la moyenne quadratique $M_q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$,
- la moyenne harmonique $\dfrac{1}{M_h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$.

Exercice 42. ♪

Un rectangle a pour dimension $L = 9$ et $l = 4$. Quelle est la longueur du côté du carré ayant la même aire ?

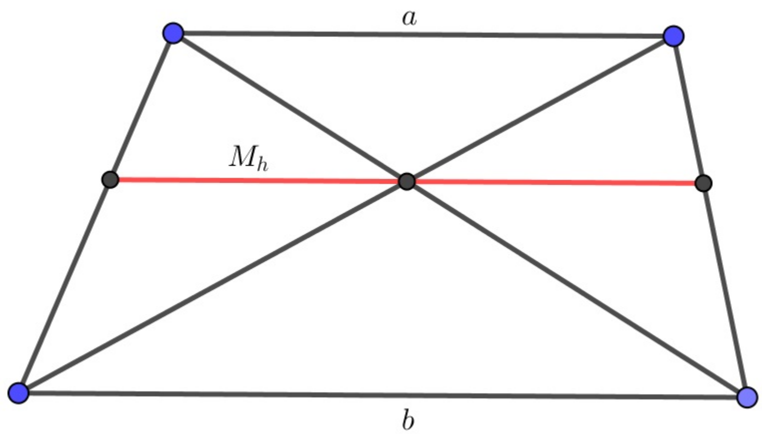
Exercice 43. ♪

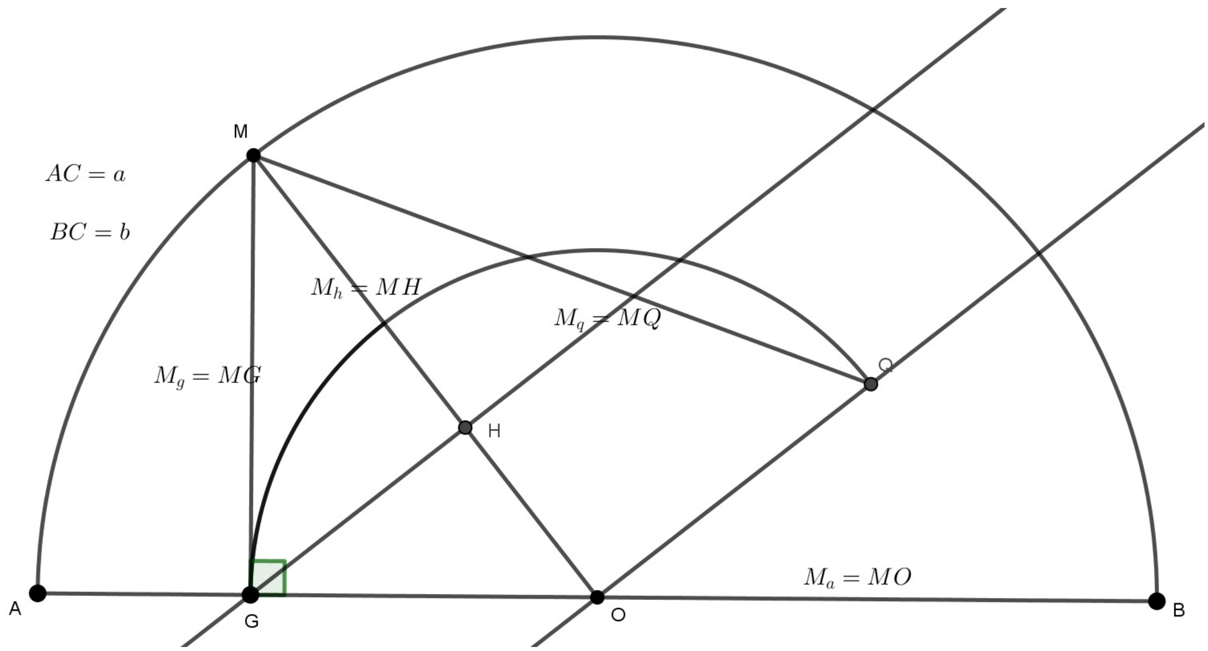
Si je prends une route de montagne à vélo et que je monte à 20km.h^{-1} et que je descends par la même route à 60km.h^{-1}, quelle es ma vitesse moyenne ?

Exercice 44. ♪

Si l'on prend deux disques de métal de même épaisseur e et de rayons respectifs a et b et que l'on veut construire deux disques de même rayon, toujours d'épaisseur e, quelle devra être le nouveau rayon ?

Voici deux illustrations graphiques :





Exercice 45. ♩
Sur la seconde, montrer que l'on a bien les bonnes moyennes représentées.

On remarque au passage la relation d'ordre :

$$\boxed{M_h \leq M_g \leq M_a \leq M_q}$$

Définition 1.29 *Dans le cas général, si $(a_1, \dots, a_n)$ est un n-uplet de réels, alors on définit*

- *la moyenne* ***arithmétique*** *par* $M_a = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$,
- *la moyenne* ***géométrique*** *par* $M_g = \sqrt[n]{a_1 \times \cdots \times a_n}$,
- *la moyenne* ***quadratique*** *par* $M_q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$,
- *la moyenne* ***harmonique*** *par* $\dfrac{1}{M_h} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right)$.