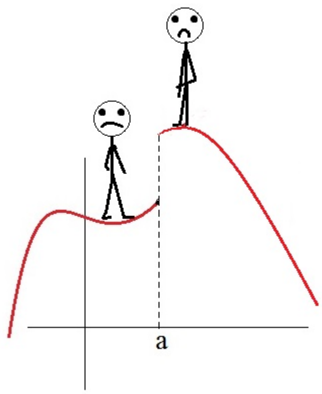
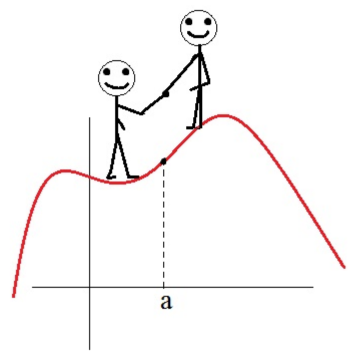
Continuité

Leçon 4
Tale-Spé-Math- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

"Peu de choses définissent un homme aussi bien que son appartenance à une génération. Et peu de choses définissent aussi bien un génération que la continuité de quelques idées dans le temps." Carlos Fuentes (1928-2012).

I Définition et exemples





Définition 4.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$. On dit que f est* ***continue*** *en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
Si f est continue en tout réel $a \in I$, on dit que f est continue sur I.

Remarque: Il peut arriver que la propriété requise ne soit satisfaite que d'une côté : si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$), on parle alors de **continuité à droite** en a (resp. **continuité à gauche** en a).

Ainsi, une fonction qui serait à la fois continue à gauche et à droite en un réel a est simplement continue en a.

Une image souvent répandue est que l'on peut tracer la courbe d'une fonction continue sans lever le stylo de la feuille.

Définition 4.2 *En combinant les ε-définitions des limites, on obtient que f est continue en a si et seulement si*

$$\boxed{\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } \eta > 0 \text{ tel que } |x - a| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon}$$

La plupart des fonctions que l'on rencontre dans la nature sont continues sur leur domaine de définition comme nous allons le voir. Mais il y a des exceptions de taille comme la partie entière par exemple qui est discontinue en tous les entiers.

Exercice 1. ♩

Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{e^x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 2. 𝅘𝅥𝅯

Déterminer si la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ est continue en 2.

Exercice 3. 𝅗𝅥

Etudier la continuité de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1-\sin 3x}{1+\cos 2x}$

Exemples:

- Le cas pathologique : $f : x \longmapsto \dfrac{x-2}{x-2}$.

La fonction est continue partout sauf en 2 où elle n'est pas définie de toute façon. En revanche, ses limites à gauche et à droite en 2 sont égales à 1. Il ne manque vraiment pas grand chose pour que cette fonction devienne continue.

On peut construire une nouvelle fonction :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

On vient d'effectuer un **prolongement par continuité** de f en 2.

Définition 4.3 *Soit f une fonction continue sur $I\backslash\{a\}$ admettant une limite finie (bilatère) ℓ en a. Alors la fonction $\tilde{f}$ définie par :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I\backslash\{a\} \\ \ell & \text{sinon.} \end{cases}$$

est continue en a et appelée prolongement par continuité de f en a.

- Le cas classique : La fonction partie entière. A connaître par cœur. On la définit par

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}.$$

- Le cas létal : Essayer de tracer le graphe de $f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 4. ♪

Construire le graphe de la fonction $f : x \longmapsto \lfloor \cos(x) \rfloor$. Et déterminer quels sont les points de discontinuité.

Attention ! Certains phénomènes sont clairement continus comme la taille d'une personne (contrairement à ce que certains croient, on ne grandit pas par salve durant la nuit), mais ce n'est pas toujours le cas : Au cinéma, on a l'impression que l'action est continue alors que l'on ne projette que 24 images par secondes (moins dans un streaming de mauvaise qualité ou un jeu video)

En revanche, le courant à créneau que l'on peut voir sur un oscilloscope semble être discontinu alors qu'il est continu (à l'échelle de l'électron).

II Propriétés

Proposition 4.4 *Si f et g sont deux fonctions continues sur I, alors kf (avec $k \in \mathbb{R}$), $f + g$ et fg sont continues sur I.*
Pour $\frac{f}{g}$, c'est un tout petit peu plus cher, il faut supposer que g ne s'annule pas sur I.

Démonstration: Les démonstrations sont des conséquences directes des théorèmes sur les limites de fonctions.

$\square$

Corollaire 4.5 *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fractions rationnelles sont continues sur leurs intervalles de définition.*

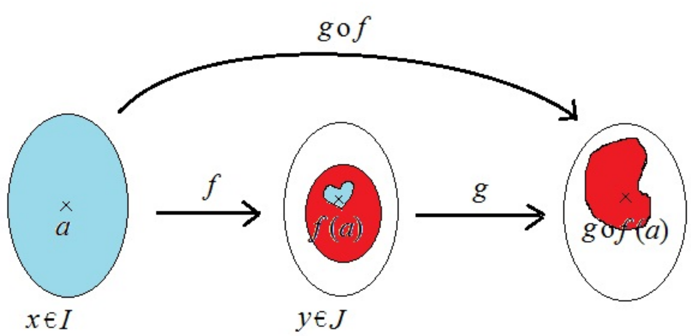
Exercice 5. ♪
Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ en 2.

Proposition 4.6 *(Continuité et composition) Si f est continue sur I et si g est continue sur J telle que pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \in J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.*

Démonstration: On veut aboutir à

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } \eta' > 0 \text{ tels que } |x - a| \leq \eta' \quad \Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(f(a))| \leq \varepsilon$$

En termes de diagramme de Venn, cela donne :



□

Proposition 4.7 *Si un fonction f est continue en $a \in \mathscr{D}_f$, alors elle est bornée dans un voisinage de a.*

Démonstration: Il suffit d'écrire la définition et de fixer une valeur de ε ($\varepsilon = \sqrt{17}$ par exemple).

□

III Caractérisation séquentielle

On peut se poser la question de la véritable utilité de la continuité (à part pour avoir de jolies courbes). En fait, l'essentiel vient du théorème suivant :

Théorème 4.8 *Soit f une fonction continue en un réel $a \in \mathscr{D}_f$. Soit (u_n) une suite de réels de $\mathscr{D}_f$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Alors on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$$

Autrement dit, on peut intervertir limite de suite et fonction continue.

Démonstration:

□

Remarque: Les problèmes d'interversion de limites sont en général très difficiles. Celui-ci est le premier d'une série épique.

Exercice 6. ♪

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{|\sin n|}{n}}$

Remarque: En fait, il y a mieux (mais c'est plus cher) : il existe une définition alternative de la continuité que l'on nomme la caractérisation séquentielle et qui dit que si l'égalité du théorème est vraie pour toute suite de réels (u_n) tendant vers a, alors f est continue en a.

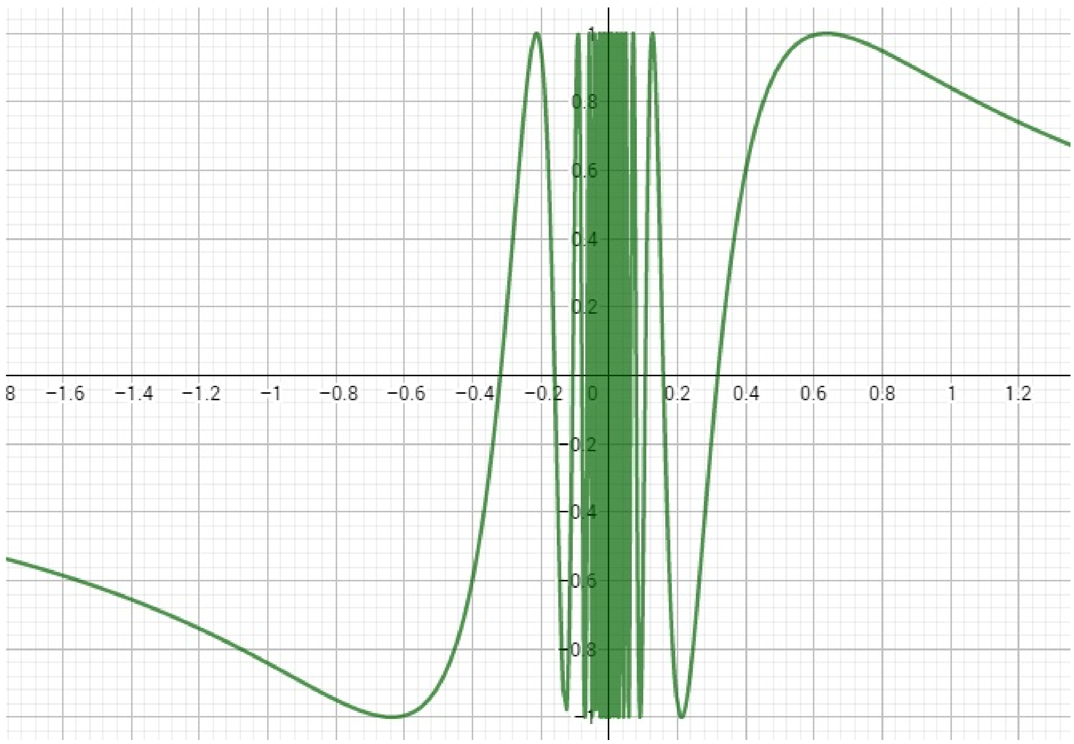
Exercice 7. ♩
Essayer d'appliquer le théorème à la fonction f définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor$ et $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 8. ♩
Déterminer les fonctions continues f telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$, on ait $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Application très importante : On utilise souvent le théorème par l'absurde pour démontrer qu'une fonction n'est pas prolongeable par continuité (ou qu'elle n'admet pas de limite). Voici un exemple célèbre.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ et on voudrait savoir si elle est prolongeable par continuité en 0.

Voici la tête de la courbe :



On sent bien que ce n'est pas gagné...

On procède donc par l'absurde en supposant qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}$ (et donc en particulier en 0).

L'idée pour arriver à une absurdité est de trouver deux suites (u_n) et (v_n) tendant vers 0 telles que les suites $(\tilde{f}(u_n))$ et $(\tilde{f}(v_n))$ ne tendent pas vers la même limite.

IV Le théorème des valeurs intermédiaires

Sans aucun doute l'un des théorèmes les plus importants de l'analyse.

Etude des zéros d'une fonction : On pose f la fonction définie par $f(x) = (x+1)^3 + x$. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une solution notée α sur l'intervalle $[-1; 0]$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Théorème 4.9 *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Si λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \lambda$.*

Démonstration:

□

Exercice 9.

Mon TGV part à 8h04 samedi matin de Saint-Jean et arrive à 10h04 à Montparnasse. Le lendemain, je prends un train retour qui part et arrive aux mêmes horaires mais en sens contraire. Montrez qu'il existe un endroit sur le trajet où je suis passé à la même heure les deux jours.

Corollaire 4.10 *Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine.*

Démonstration:

□

Corollaire 4.11 *(Petit théorème du point fixe) Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $I = [a, b]$ telle que $f(I) \subset I$. Alors il existe un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (i.e. un point fixe).*

Démonstration:

□

Corollaire 4.12 *Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.*
(i.e. l'image continue d'un intervalle est un intervalle)

Démonstration:

□

Exercice 10. ♪
Déterminer $f(]-1, 2[)$ pour $f : x \longmapsto x^2$.

Exercice 11. ♪
Déterminer $g(\mathbb{R})$ pour $g : x \longmapsto \dfrac{x}{1 + |x|}$.

V Théorème de bijection monotone

Théorème 4.13 *(Théorème de bijection monotone) Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et strictement monotone sur cet intervalle, si λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \lambda$.*

Démonstration:

□

Remarque: Depuis les années 90, ce théorème a changé de nom. On le retrouve souvent cité comme "corollaire des valeurs intermédiaires". La raison en est que le terme bijection avait alors disparu des programmes. Dans le postbac, il a largement conservé son appellation d'origine.

Corollaire 4.14 *Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et si $f(a)\times f(b)<0$, alors f possède un unique zéro.*

Démonstration: Trivial.

□

Nota Bene : Ce théorème s'étend à tout type d'intervalle sans difficulté comme dans l'exercice suivant :

Exercice 12. ♩

On pose $\begin{array}{cccc} \varphi : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan \frac{\pi(x-1)}{2} \end{array}$. S'agit-il d'une bijection ?

Exercice 13. ♩

Montrer que si f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=u$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=v$, alors pour tout $\lambda\in]u,v[$, il existe un unique $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha)=\lambda$.

Exercice 14. ♩ *Verbatim*

Déterminer le nombre de zéros de la fonction f définie par $f(x)=(x+1)^3+x$ ainsi qu'une valeur approchée de chacun d'eux à 10^{-1} près.