Géométrie vectorielle

Leçon 5
Tale-Spé-Math- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

« Espace, frontière de l'infini vers lequel voyage notre vaisseau spatial. Sa mission : Explorer de nouveaux mondes étranges, découvrir de nouvelles vies, d'autres civilisations, et au mépris du danger, reculer l'impossible" Captain Kirk

I Vecteurs

Tout ce qui suit est valable dans le plan, l'espace et au-delà...
On rappelle la

Définition 5.1 *Un **vecteur** est la donnée*
- *d'une direction (une droite),*
- *d'un sens (sur la droite en question),*
- *d'une norme (un réel positif, une longueur).*

On prendra garde que le vecteur nul a toutes les directions, tous les sens et une norme nulle.

Attention ! Il faut faire la distinction entre un "vecteur force" en physique qui possède, en plus, un point d'application. En mathématiques, il y a une infinité de représentants pour un vecteur donné.

On rappelle donc les propriétés déjà connues dans le plan que l'on généralise sans problème. Il suffit de penser que lorsque l'on a deux vecteurs, ils sont nécessairement coplanaires. En particulier, la somme de deux vecteurs est obtenue de manière identique et, pour obtenir l'opposé d'un vecteur, il suffit de changer son sens en gardant la direction et la norme.

Proposition 5.2 *(Vrac) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors*

i. $0.\vec{u} = \vec{0}$,
ii. $\lambda.\vec{u} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ *ou* $\vec{u} = \vec{0}$,
iii. $\lambda.(\mu.\vec{u}) = (\lambda \times \mu).\vec{u}$,
iv. $(\lambda + \mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}$,
v. $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$.

Proposition 5.3 *(La propriété qu'on oublie tout le temps mais qu'on ne devrait pas parce qu'elle fait mal aux dents après) Si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, alors $||\vec{u}|| = |\lambda| \times ||\vec{v}||$.*

Malheur à celui qui oublie les valeurs absolues autour du λ.

Proposition 5.4 *(La règle du parallélogramme) Avec les quatre points B, L, E, et U,*

$$BLEU \text{ est un parallélogramme si et seulement si } \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{UE}.$$

Attention ! à l'ordre des lettres ! Le procédé mnémotechnique basé sur le français/anglais est là pour vous y faire penser.

Proposition 5.5 *(La relation de Chasles) Soient A, B et C trois points. On a* $\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$

Exercice 1. ♪

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On construit les points P, Q, R et S tels que

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD},$$

Que dire du quadrilatère $PQRS$?

Un peu de français pour bien comprendre la suite : Etes-vous capable de faire la différence entre *"non tous nuls"* et *"tous non nuls"* ?
Réfléchissez-y et puis demandez-vous ce qu'il vaut mieux que votre professeur dise à la classe :

"Vous êtes tous non nuls !"
ou
"Vous êtes non tous nuls !"

Personnellement, je choisirais la première qui me laisse envisager l'avenir avec plus de sérénité...

Définition 5.6 *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits* ***colinéaires*** *s'il existe deux réels α et β non tous nuls tels que*

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

On dit aussi que les deux vecteurs sont ***liés****.*

Exercice 2. ♩

On trouve parfois (sur des copies et même dans des livres) la définition suivante pour la colinéarité : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Montrez que cela ne fonctionne pas à l'aide d'un contre exemple.

Que faudrait-il rajouter à cette "définition" pour avoir une équivalence ?

Remarque: On retiendra de cet exercice que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires non nuls, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

Définition 5.7 *Plus généralement, on dit que n vecteurs $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n})$ sont* ***libres*** *s'il n'existe pas de n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{u_k} = \vec{0}$.*

En dimension n, on ne peut pas trouver plus de n vecteurs libres.

II Vademecum des questions classiques

II.1 Problème de colinéarité

• Comment montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ou liés) ?

Il suffit montrer qu'il existe un couple de réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ non tous nuls tel que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

Exercice 3. ♪

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

II.2 Problème d'alignement

• Comment montrer que trois points A, B et C sont alignés ?

Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

• Comment montrer que deux points sont alignés ?

Laissé au lecteur.

Exercice 4. ♪

Les points $A(1,0,3)$, $B(0,-2,6)$ et $C(3,4,-3)$ sont-ils alignés ?

II.3 Problème de parallélisme

• Comment montrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ?

En montrant que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 5. ♪

Aux trois points précédents, on rajoute $D(2,2,0)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

II.4 Problème de coplanarité

A noter que "coplanarité" est un néologisme hideux.

• Comment montrer que quatre points A, B C et D sont coplanaires ?

Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont liés ; i.e. qu'il existe un triplet de réels $(\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls tel que $\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}+\delta\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}$.

• Comment montrer que trois points sont coplanaires ?

Laissé au lecteur.

Exercice 6. ♪

Les points $A(1,-1,2)$, $B(1,2,3)$, $C(1,1,0)$ et $D(3,2,-4)$ forment-ils un tétraèdre ?

III Droites et plans de l'espace

Définition 5.8 *On définit une droite D par la donnée d'un point A de l'espace et d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul. On a alors*

$$M \in D \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}.$$

On appelle un tel vecteur $\overrightarrow{u}$ un ***vecteur directeur*** *de D.*

Remarque: A ce niveau, il faut remarquer que la théorie perd pied. En effet, pour définir un vecteur, il faut une direction qui est... une droite. Le problème structurel est plus important qu'il n'y paraît. Comment définir une droite sans vecteur alors ?

Dans son livre I, Euclide définissait la droite (en fait, un segment de droite) comme *"une longueur sans largeur également placée entre deux points"*. Pas très concluant...

Plus tard, on trouve *"un objet géométrique formé de points alignés"*. Seul problème : aligné est synonyme de "sur une droite" non ?...

Si l'on reste concret, il suffit de dire que la ligne droite est *"le plus court chemin entre deux points"*. Là encore, il y a un souci : Sur Terre, le chemin le plus court entre deux points est... un cercle !

On peut aussi voir une droite comme *"l'intersection de deux plans"*. Mais il semble encore plus délicat de définir un plan (surtout quand on n'a pas les droites !)

Alors on s'en remet à la géométrie vectorielle (en fait affine ici) en imaginant que le concept de vecteur va de soi (alors que pour définir la direction... bref !).

Une conséquence directe de la définition est le

Lemme 5.9 *Deux vecteurs non nuls sont vecteurs directeurs d'une même droite si et seulement si ils sont colinéaires.*

Définition 5.10 *On définit un plan $\mathscr{P}$ par la donnée d'un point A de l'espace et de deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*
On a alors $M \in \mathscr{P} \quad \Leftrightarrow \quad$ il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Définition 5.11 *Si $\mathscr{P}$ est un plan de l'espace, alors il est défini par un triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$. Ce triplet s'appelle un **repère** du plan.*
*On appelle **base** de ce plan le couple de vecteurs (qui sont non colinéaires) $(\vec{u}, \vec{v})$ qui définit le plan.*

Il est clair qu'il existe une infinité de repères ou de bases pour un plan donné.

Nous restons ici avec des plans dans l'espace, donc en dimension 3 bien que la théorie puisse être étendue en dimension supérieure. Cela constitue d'ailleurs le fondement de l'algèbre linéaire qui est l'une des branches les plus importantes des mathématiques.

Définition 5.12 *On appelle **repère de l'espace** un quadruplet $(A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où A est un point de l'espace et les trois vecteurs sont libres.*

Définition 5.13 *Deux droites sont **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.*
*Deux droites sont **sécantes** si leur intersection est réduite à un point.*

Exercice 7. ♪
Si D et D' sont deux droites de l'espace, que signifie l'assertion $D \cap D' \neq \emptyset$?

Etymologie (Cold case) : Essayons de clore une bonne fois pour toute le débat entre ceux qui pensent que "parallèle" implique disjoint et les autres, moins intransigeants qui acceptent que les droites soient confondues.

Pour cela, il faut remonter à Euclide : Dans ces livres, Euclide ne considère des droites parallèles que si elles sont disjointes. En effet, "*para*" signifie "à côté" et "*allelon*" veut dire "l'un de l'autre". Et c'est bien normal pour lui. Il ne fait que de la géométrie de base et lorsqu'il a deux droites confondues, il leur donne le même nom et ne s'embarrasse pas de difficultés inutiles.

Là où les problèmes arrivent, c'est lorsque l'on fait des mathématiques avec un raisonnement générique. Si on écrit $D//D'$ et $D'//D''$ par exemple, on sait que l'on a une propriété générale qui dit que $D//D''$. On appelle cela la **transitivité**. Mais que se passe-t-il si $D = D''$. Le début reste dans le cadre imposé par Euclide, mais pas la conclusion...

La propriété de transitivité est importante pour pouvoir faire des raisonnements poussés. Aussi, après guerre, le groupe Bourbaki a décidé que le terme devait évoluer. On a donc gardé le terme "parallèles" en distinguant "parallèles disjointes" de "parallèles confondues", cette dernière étant un oxymore.

De nos jours, on préfère de plus en plus parler de droites "parallèles" dans le cas général et de "strictement parallèles" quand elles sont distinctes. Mais le symbole $D//D'$ accepte qu'elles soient confondues.

Attention ! Dans l'espace, le contraire $D//D'$ n'est pas D et D' sécantes (comme c'était le cas dans le plan).

On vérifie que la définition de parallélisme donnée est cohérente avec celle du collège :

Lemme 5.14 *Deux droites du plan sont parallèles si et seulement si elles sont confondues ou si elles n'ont pas de point commun.*

Démonstration: On démontre la propriété par contraposée. Autrement dit, on va prouver que D et D' ne sont pas parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Si les vecteurs ne sont pas colinéaires, alors les droites ne sont pas parallèles.

Réciproquement, soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ deux vecteurs directeurs respectifs de D et D'. Si les droites ne sont pas parallèles, on veut montrer qu'ils ne sont pas colinéaires. Il existe un point $C = D \cap D'$ (que l'on peut supposer différent de A et de A') et, par définition, un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C} = \beta\overrightarrow{A'B'}$. On finit la raisonnement par l'absurde : si les vecteurs étaient colinéaires, cela assurerait l'existence d'un couple de réels non nuls $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{0}$. Ainsi, $\beta\lambda\overrightarrow{AC} + \alpha\mu\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$, ce qui implique que A (et A') sont sur les deux droites. Les droites sont donc confondues. Contradiction.

□

Définition 5.15 *Une droite et un plan sont **parallèles** si la droite est incluse dans le plan ou s'ils n'ont pas d'intersection.*
*Une droite et un plan sont **sécants** si leur intersection est réduite à un point.*

Définition 5.16 *Deux plans sont **parallèles** s'ils sont confondus ou d'intersection vide.*
*Deux plans sont **sécants** si leur intersection est une droite.*

IV Positions relatives

IV.1 Deux droites

Soient D et D' deux droites de l'espace. Voici les configurations possibles :

• Elles sont parallèles. Il faut distinguer parallèles au sens large qui permet que les deux droites soient confondues, ou, *a contrario* strictement parallèle.

Pour le démontrer, il suffit de prendre deux vecteurs directeurs sur chacune des deux droites et déterminer s'il sont colinéaires.

Au passage, deux droites parallèles sont nécessairement coplanaires.

• Elles sont sécantes si elles sont coplanaires et non parallèles.

• Elles ne sont ni parallèles, ni sécantes. Cette configuration n'existe pas dans le plan. En fait, on dit qu'elles ne sont pas coplanaires grâce à la proposition suivante :

Proposition 5.17 *Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.*

Démonstration: On pose $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ des vecteurs directeurs respectifs de D et D'.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si D et D' sont sécantes en un point A, alors le plan $\mathscr{P}$ défini par A et les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ contient trivialement les deux droites.

Si $D//D'$, il y a deux cas. Soit elles sont confondues et n'importe quel plan contenant D fera l'affaire, soit elles sont disjointes. Auquel cas, on prend deux points A et A' (nécessairement distincts) respectivement sur D et D'. On considère alors le plan $\mathscr{P}$ défini par le point A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AA'}$ (qui sont bien libres). Clairement, $D \subset \mathscr{P}$ et si $M \in D'$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A'M} = \lambda\overrightarrow{u'}$. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires non nuls, il existe aussi α tel que $\overrightarrow{u'} = \alpha\overrightarrow{u}$. Donc

$$\overrightarrow{A'M} = \lambda\overrightarrow{u'} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} = \lambda\alpha\overrightarrow{u} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \lambda\alpha\overrightarrow{u} + \overrightarrow{AA'}$$

Ainsi, $M \in \mathscr{P}$ par définition.

$\boxed{\Rightarrow}$ Tout se passe dans le plan et le résultat est trivial. On pourrait laisser au lecteur le soin de regarder dans ses cahiers de collège. Mais il n'en trouvera pas la preuve. Alors il faudra attendre une preuve analytique qui ne prendra pas plus de deux secondes quand nous aurons travaillé sur les équations de droites.

□

IV.2 Une droite et un plan

Soient D une droite et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Les configurations possibles sont :

• La droite est parallèle au plan. Avec la distinction, là encore, de strictement parallèle si $D \not\subset \mathscr{P}$ et parallèle au sens large si $D \subset \mathscr{P}$.

Pour le montrer, on considère un vecteur directeur de D et on montre qu'il est vecteur directeur de $\mathscr{P}$.

• La droite n'est pas parallèle au plan, auquel cas elle est nécessairement sécante à ce plan.

Proposition 5.18 *Si D n'est pas parallèle à $\mathscr{P}$ alors D est sécante à $\mathscr{P}$. (i.e. ils ont un seul point commun).*

Démonstration: Evident. Si la droite et le plan ont deux points communs, la droite est incluse dans le plan.

□

IV.3 Deux plans

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans.

• Deux plans sont parallèles ou

• sécants. Dans ce cas leur intersection est une droite.

Proposition 5.19 *Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux plans de l'espace non parallèles, alors ils se coupent en une droite.*

Démonstration: Si les deux plans ne sont pas parallèles, alors ils ne sont pas confondus et ils ne sont pas disjoints. Soit A un point d'intersection. On pose $(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ (resp. $(A; \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$) une base de $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{P}$).

Comme on travaille en dimension 3, les quatre vecteurs sont liés (et non nuls par définition). Donc il existe $(\alpha, \alpha', \beta, \beta') \in \mathbb{R}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\}$ tel que $\alpha\overrightarrow{u} + \alpha'\overrightarrow{u'} + \beta\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{0}$. On pose $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha'\overrightarrow{u'} = \beta\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{v'}$. On a alors la droite Δ définie par $(A; \overrightarrow{w})$ qui est à la fois dans $\mathscr{P}$ et dans $\mathscr{P}'$.

Pour montrer qu'il s'agit bien de l'intersection, il suffit de prouver par l'absurde qu'il ne peut pas y avoir d'autre point d'intersection : Soit B un point de $(\mathscr{P} \cap \mathscr{P}')\backslash\Delta$. Alors $\overrightarrow{AB}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{w}$ et $(A; \overrightarrow{w}, \overrightarrow{AB})$ est une base d'un plan contenu par définition dans $\mathscr{P}$ et dans $\mathscr{P}'$. Contradiction avec le fait que les plans ne sont pas confondus.

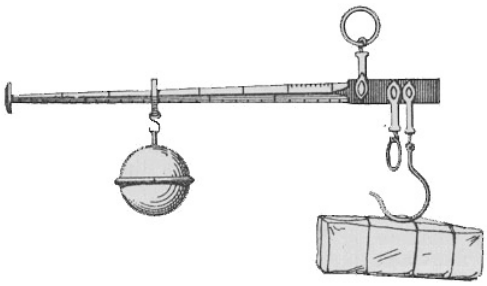
□

Exercice 8. ♩ *Le théorème du toit.*

Soient D et D' deux droites strictement parallèles et soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans contenant respectivement D et D'. Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ s'intersectent en une droite Δ, alors $\Delta // D // D'$.

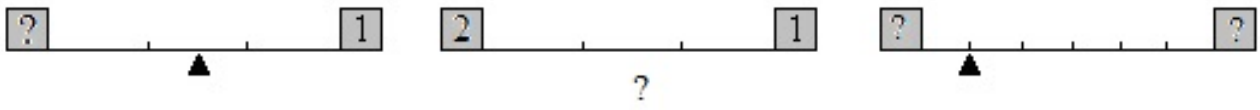
V Barycentres

Au $XIII^e$ siècle, le meunier pesait sa farine avec une balance romaine :



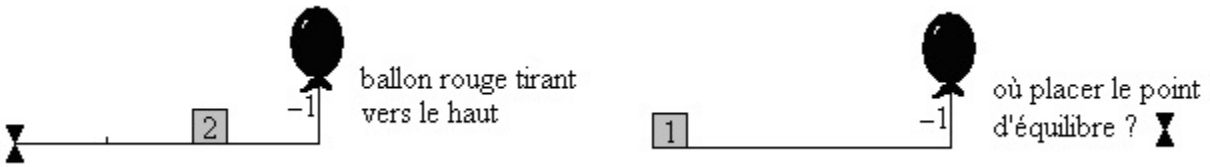
On en trouve encore sur les marchés ou dans les brocantes.

Afin de bien comprendre la notion de levier (moments de forces) essayez de compléter les équilibres suivants :



On a besoin d'un nouveau concept : La Super-Balance-Romaine.

Il faut pouvoir affecter des masses négatives. Pour cela on utilise des ballons :



Il ne nous reste plus qu'à donner un cadre à cette théorie de l'équilibre.

Définition 5.20 *On appelle* ***point pondéré*** *un couple $(A;\alpha)$ dans lequel A est un point et α un réel (la masse ou la pondération).*

On appelle ***système pondéré*** *un ensemble fini de points pondérés $\{(A_1;\alpha_1),(A_2;\alpha_2),\dots,(A_n;\alpha_n)\}$ avec les points soient distincts et les pondérations non nulles.*

Définition 5.21 *Si $\{(A_1;\alpha_1),(A_2;\alpha_2),\dots,(A_n;\alpha_n)\}$ est un système pondéré tel que* $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0}$*, on appelle* ***barycentre*** *de ce système l'unique point G tel que*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{GA_k}=\overrightarrow{0}}$$

<u>*Démonstration de l'unicité :*</u> On applique la relation de Chasles à chacun des vecteurs $\overrightarrow{GA_k}$ pour $k\in[\![2,n]\!]$:

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_2})+\cdots+\alpha_n(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_n})=\overrightarrow{0}.$$

D'où, en factorisant,

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{GA_1}=-\sum_{k=2}^{n}\alpha_k\overrightarrow{A_1A_k}\quad\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{GA_1}=\frac{-\sum_{k=2}^{n}\alpha_k\overrightarrow{A_1A_k}}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}.$$

chose que l'on peut faire car $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\neq 0$. Le vecteur de droite est constant et l'unicité de construction d'un vecteur donné avec une des extrémités fixée fournit l'unicité de G.

□

Remarque: Que se passe-t-il si la somme des pondérations est nulle ?
Dans ce cas, on voit que l'éclatement de la relation avec Chasles donne

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}_{=0} \overrightarrow{GA_1} = -\sum_{k=2}^{n} \alpha_k \overrightarrow{A_1A_k}$$

il n'y a plus de point G. Too bad. Le barycentre n'existe pas.

Exercice 9. ♪

Si G est le barycentre du système $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$.

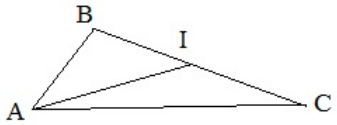
1) Montrer que G est sur la droite (AB).

2) Discutez pour déterminer quel est de A et de B le point le plus proche de G.

Exemple: On démarre doucement : le triangle.
Soit ABC un triangle. On cherche le barycentre du système $\{(A;1),(B;1),(C;1)\}$. On écrit la définition et on éclate avec Chasles une fois encore :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

A ce niveau, il faut simplifier le vecteur de droite en utilisant le milieu I de $[BC]$. Nous reviendrons sur cette astuce en la généralisant plus loin.

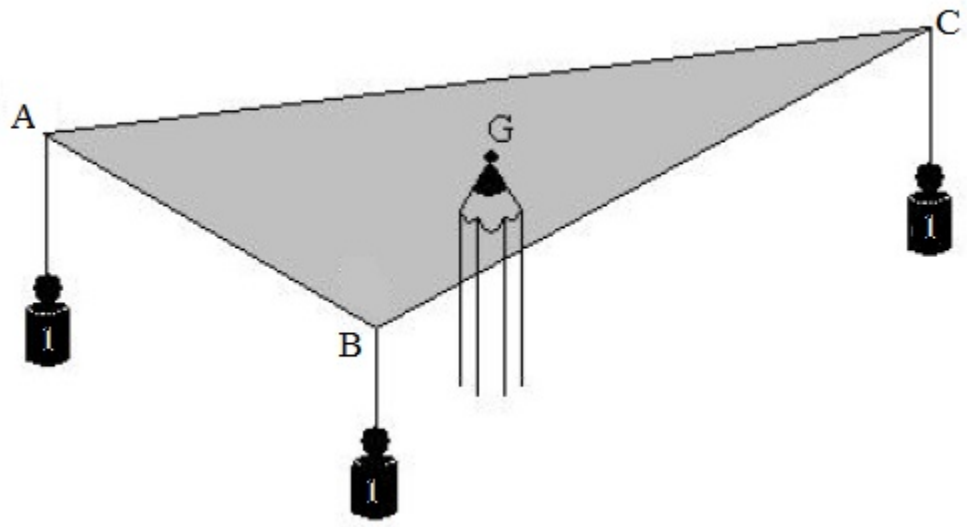


On obtient alors

$$3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AI}+\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{=\overrightarrow{0}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Mais ? ! On connaît ce point !

C'est le centre de gravité du triangle. Quand on y réfléchit, c'est assez évident en terme de physique. Il suffit de considérer le dessin suivant :



Définition 5.22 *On appelle* ***isobarycentre*** *de* $(A_1, \dots, A_n)$ *le barycentre du système pondéré* $\{(A_1;1), \dots, (A_n;1)\}$.

Attention ! L'isobarycentre d'un polygône n'est pas toujours le centre de gravité. Par exemple, c'est faux pour un quadrilatère. On pourra, par exemple, montrer que ces deux points coïncide sur un cerf-volant si et seulement si celui-ci est un losange.

On remarque aussi par la même occasion que l'on peut multiplier toutes les pondérations par une constante réelle non nulle, cela ne change pas le centre de gravité :

Proposition 5.23 *Si* G *est le barycentre du système* $\{(A_1;\alpha_1), (A_2;\alpha_2), \dots, (A_n;\alpha_n)\}$, *alors il est aussi barycentre du système pondéré* $\{(A_1;\lambda\alpha_1), (A_2;\lambda\alpha_2), \dots, (A_n;\lambda\alpha_n)\}$ *avec* λ *réel quelconque non nul.*

Démonstration: Exercice ♪ .

□

Exercice 10. ♩
Trouver le barycentre du système pondéré $\{(A;1), (B;m), (C;1-m)\}$ en fonction du réel m.

Proposition 5.24 *(Le barycentre partiel) Si* G *est le barycentre du système* $\{(A_1;\alpha_1), (A_2;\alpha_2), \dots, (A_n;\alpha_n)\}$ *et si* H *est barycentre de* $\{(A_k;\alpha_k), \dots, (A_n;\alpha_n)\}$, *alors* G *est aussi barycentre du système pondéré* $\left\{(A_1;\alpha_1), \dots, (A_{k-1};\alpha_{k-1}), \left(H; \sum_{i=k}^{n} \alpha_i\right)\right\}$.

Démonstration: Exercice ♪ .

□

On retrouve les points remarquables du triangle avec les barycentres...
Exercice 11. ♩
Déterminer les points remarquables du triangle ABC obtenus comme barycentres des systèmes :
1) Le centre du cercle circonscrit : $\{(A;\sin 2\widehat{A}), (B;\sin 2\widehat{B}), (C;\sin 2\widehat{C})\}$.
a) Commencer par déterminer ce barycentre sur un triangle rectangle.
b) On procède à une analyse-synthèse. Soit O le centre du cercle circonscrit et P le point d'intersection de (AO) et $BC)$. On pose $\beta = \widehat{POC}$ et $\gamma = \widehat{POB}$. Montrer que $\sin\beta\overrightarrow{OB} + \sin\gamma\overrightarrow{OC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OP}$.
c) Déterminer une relation entre β et $\widehat{B}$, puis entre γ et $\widehat{C}$.
d) En déduire que P est le barycentre de $\{(B;\sin 2\widehat{B}), (C;\sin 2\widehat{C})\}$, puis que le barycentre cherché est sur (AO).
2) $\{(A;\tan\widehat{A}), (B;\tan\widehat{B}), (C;\tan\widehat{C})\}$.
3) $\{(A;\sin\widehat{A}), (B;\sin\widehat{B}), (C;\sin\widehat{C})\}$.

Enfin, le théorème le plus important qui clôt cette théorie :

Théorème 5.25 *(Théorème de réduction) Si* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A_1;\alpha_1), (A_2;\alpha_2), \dots, (A_n;\alpha_n)\}$, *alors on a pour tout point* M *:*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \overrightarrow{MG}}$$

Démonstration: Chasles, n fois.

□

L'intérêt de ce théorème réside dans la recherche de solution à des équations mettant en œuvre des points comme inconnues.

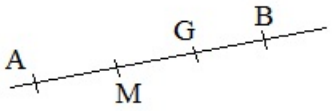
Exemple: Cherchons tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.

On introduit G le barycentre du système pondéré $\{(A;1),(B;2)\}$. On obtient alors (avec Chasles ou directement avec le théorème de réduction) :

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AB}$$

ce qui permet de placer le point M solution.

Il faut donc voir ce théorème comme une possibilité de "regrouper les M" comme on le ferait avec des x dans une équation réelle. On dit bien "réduire" l'équation.



Exercice 12. ♪

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On note I, J, K et L les isobarycentres respectifs de (A,B,D), (B,C,D), (A,B,C) et (A,D,C).

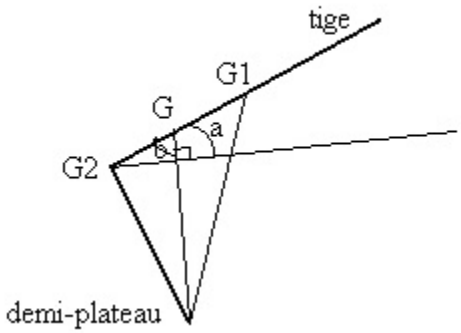
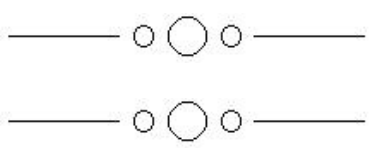
Montrer que l'isobarycentre de $IJKL$ est l'isobarycentre de $ABCD$.

Exercice 13. ♩

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que (Faire une figure)

1) $||2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}||=||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}||$.

2) $||2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}||=||2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}||$.

Exercice 14. ♩

Si je jette une punaise (considérée comme constituée d'un plateau circulaire de même masse que la tige et de diamètre la longueur de la tige). On suppose qu'elle ne rebondit pas. Quelle est la probabilité qu'elle se stabilise sur le plateau, tige en haut ?